定理C.2

(1)若 $X \to Exp(\lambda_1), Y \to Exp(\lambda_2)$，且 $X \coprod Y$, 則 $\min(X,Y) \to Exp(\lambda_1+\lambda_2)$
(2)若 $X \to Geo(p_2), Y \to Geo(p_1)$，且 $X \coprod Y$, 則
$\min(X,Y) \to Geo(p = 1-(1-p_1)(1-p_2))$

[證明]

(1)

令 $Z = \min(X,Y)$,

則 $F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{\min(X,Y) \le z\}$

$$=1-P\{\min(X,Y) > z\} = 1-P\{X > z\}P\{Y > z\} = 1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, z > 0$$

$$\therefore f(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = (\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z},\ z > 0$$

(2)

令 $Z = \min(X,Y)$,

則 $F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{\min(X,Y) \le z\}$

$$= 1-P\{\min(X,Y) > z\} = 1-P\{X > z\}P\{Y > z\}$$
$$= 1-((1-p_1)(1-p_2))^z, z = 1,2,3,\cdots$$

$$\therefore f(z) = F_Z(z) - F_Z(z-1)$$
$$= ((1-p_1)(1-p_2))^{z-1} - ((1-p_1)(1-p_2))^z$$
$$= ((1-p_1)(1-p_2))^{z-1}\{1-(1-p_1)(1-p_2)\},\ z = 1,2,3,\cdots$$

$\therefore$ 可知，$Z = \min(X,Y) \to Geo(p = 1-(1-p_1)(1-p_2))$

定理C.3

若 X 爲一連續型隨機變數，其 $c.d.f$ 爲 $F_X(x)$，若令 $Y = F_X(X)$，則 Y 的分配爲 $f(y) = \begin{cases} 1, \ if\ 0 < y < 1 \\ 0, \text{ 其他} \end{cases}$ (或 $Y \to U(0,1)$)

則稱此轉換爲機率積分轉換(*probability integral transformation*)。

[證明]

令 $G_Y(y)$ 爲 $Y = F_X(X)$ 的 $c.d.f$

則 $G_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{F_X(X) \le y\}$

$$= P\{X \le F_X^{-1}(y)\} = F_X(F_X^{-1}(y)) = y,\ 0 < y < 1$$

$$\therefore f(y) = \frac{d}{dy}G_Y(y) = \begin{cases} 1, \ if\ 0 < y < 1 \\ 0, \text{ 其他} \end{cases}$$

[*Remark*]

可利用機率積分轉換的理論，去進行虛擬其他變數的工作，稱模擬(*simulation*)，其原理如下所述：

(1)在電腦的內生系統中，有一亂數產生器(*random number generator*)，其能產生一序列介於(0,1)的數值，可視其產生的數值$Y \to U(0,1)$。

(2)令所要生成的隨機變數爲X,其$c.d.f$爲$F_X(x)$,則由機率積分轉換可知，$F_X(X) \to U(0,1)$,所以可令$Y = F_X(X)$求解得$X = F_X^{-1}(Y)$。

(3)$\therefore$由(2)可知，可藉由亂數產生器產生Y值，而透過$X = F_X^{-1}(Y)$得到X,此即爲模擬。

【例題C.3】

假設吾人已能利用電腦內定的亂數產生器(*uniform generator*)以產生 *unit random number*，意即介於 0 和 1 之間的一數值。

(1)試問如何利用此uniform generator以產生standard normal distribution的亂數值。

(2)爲解題(1)因而所需引用的統計理論爲何，試述之。 （交大資管所）

[解]

(1)

(a)令亂數產生器(*random number generator*)，其能產生一序列介於(0,1)的數值，可視其產生的數值$Y \to U(0,1)$.

(b)令 $X \to N(0,1)$，其 $c.d.f$ 爲 $\Phi_X(x)$, 則由機率積分轉換可知，$\Phi_X(X) \to U(0,1)$，

所以可令$Y = \Phi_X(X)$求解得$X = \Phi_X^{-1}(Y)$。

(c)$\therefore$由(b)可知，可藉由亂數產生器產生 Y 值，而透過$X = \Phi_X^{-1}(Y)$得到 X。

(2)所需引用的統計理論爲機率積分轉換。