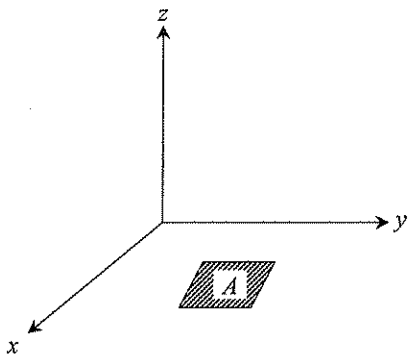
6.1 多重積分的意義

在介紹多變數之後，本章再將定積分概念導入，介紹所謂的多重積分。

多重積分（multiple integral）即爲兩個以上變數的積分，以下分別說明各種多重定積分的幾何意義：

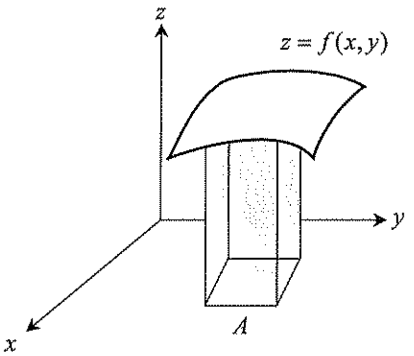
1. 雙重積分 $\iint_A dA$ ：

如下圖，爲平面積分範圍內的面積 A 。



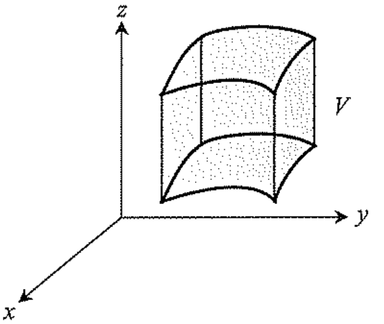
2. 雙重積分 $\iint_A f(x,y)dA$ ：

如下圖，爲空間中積分範圍 A 以上、 $z=f(x,y)$ 以下的體積。



3. 三重積分 $\iiint_V dV$ ：

如下圖，爲空間中積分範圍內的體積。



基本上，多重積分只有在以上的情形下才有其幾何意義，其他例如：$\iiint_V F(x,y,z)dV$ 等，都只是純粹數學的運算。

然而，在配合多樣的積分型式之後，即能衍生出更多種的幾何意義，例如表面積、側面積等等。積分的型式有以下幾種：

1. 軸向積分：

沿著座標軸的積分，例如：$\int_a^b f(x)dx$ 、$\iint_A f(x,y)dA$

2. 線積分：

沿著一條曲線的積分，例如：$\int_C gds$

3. 面積分：

沿著空間中的面積的積分，例如：$\iint_A hd\sigma$

6.2 多重積分的計算

6.2.1 傅比尼定理（Fubini）

多重積分的計算是從單變數積分衍生而來的，在多重積分的過程中變數之間必須視爲獨立，舉個例來說，雙重積分 $\iint_A F(x,y)dxdy$ 式子中由內而

外，先對 x 積分再對 y 積分，積分變數 x 時， y 必須視為常數。在此情形下，基本上只要界定出積分範圍 A ，可將積分順序 $dA=dxdy$ 改為 $dA=dydx$ ，但仍有以下的限制：

傅比尼定理（Fubini）：

設 $F(x,y)$ 在有界區域 $A:[a,b]\times[c,d]$ 內為連續函數，則

$$\iint_A F(x,y)dA=\int_c^d\int_a^b F(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d F(x,y)dydx$$

Attention

若 $F(x,y)$ 在 A 非連續，則不可交換積分順序！

試題 1

Evaluate $\int_1^2\int_4^9\frac{3+5y}{\sqrt{x}}dxdy$.　（92政大財政）

Sol：

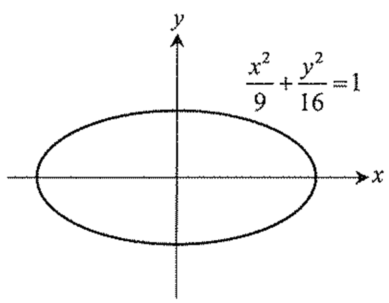
$$原式=\int_1^2\int_4^9\frac{3+5y}{\sqrt{x}}dxdy=\int_1^2(3+5y)\left(2\sqrt{x}\right)\Big|_4^9 dy$$

$$=2\int_1^2 3+5ydy=2\left(3y+\frac{5}{2}y^2\right)\Big|_1^2=21$$

試題 2

試以重積分算出 $E=\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1\right.\right\}$ 之面積。　（88雲科大工管）

Sol：



如右圖，圖形面積 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1$ ，

令 $x=3r\cos\theta, y=4r\sin\theta$

$$\Rightarrow J=\begin{vmatrix}3\cos\theta & -3r\sin\theta\\ 4\sin\theta & 4r\cos\theta\end{vmatrix}=12r$$

6.3.3 求重心

求重心的方式是以（力矩和）÷（重量和）的方式求取，假設 ρ 爲密度函數，則各種重心的求法如下：

1. 線重心：

$$\bar{x}=\frac{\int_C x\rho ds}{\int_C \rho ds}\text{、}\bar{y}=\frac{\int_C y\rho ds}{\int_C \rho ds}$$

2. 平面重心：

$$\bar{x}=\frac{\iint_R x\rho dxdy}{\iint_R \rho dxdy}\text{、}\bar{y}=\frac{\iint_R y\rho dxdy}{\iint_R \rho dxdy}$$

3. 體積重心：

$$\bar{x}=\frac{\iiint_V x\rho dxdydz}{\iiint_V \rho dxdydz}\text{、}\bar{y}=\frac{\iiint_V y\rho dxdydz}{\iiint_V \rho dxdydz}\text{、}\bar{z}=\frac{\iiint_V z\rho dxdydz}{\iiint_V \rho dxdydz}$$

試題 5

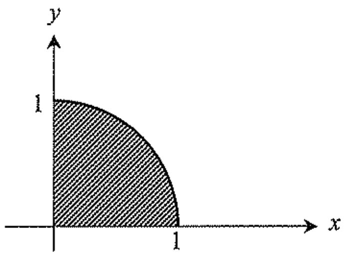
(a,b) 是 $x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$ 之區域的中心，求 (a,b)。（88台科大工管）

Sol：

由題意，化成極座標，令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta \Rightarrow J=r$

$$a=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (r\cos\theta)rdrd\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 rdrd\theta}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\cos\theta d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}d\theta}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}(\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{3\pi}$$



$$b=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (r\sin\theta)rdrd\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 rdrd\theta}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\sin\theta d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}d\theta}=\frac{\frac{1}{3}(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{3\pi}$$

試題6

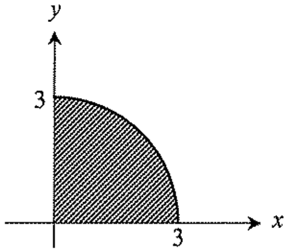
有一圓盤：$A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 9, x>0, y>0\}$，其密度函數為 $\sigma=x^2y$，求其質心。（93中央工管）

Sol：

$$\bar{x}=\frac{\iint_R x\sigma\,dxdy}{\iint_R \sigma\,dxdy}$$ ，化爲極座標，令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta \Rightarrow J=r$

$$\Rightarrow \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 r^5\cos^3\theta\sin\theta\,drd\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 r^4\cos^2\theta\sin\theta\,drd\theta}=\frac{\frac{243}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta}{\frac{243}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta}$$

$$=\frac{5}{2}\frac{\left(-\frac{\cos^4\theta}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}=\frac{15}{8}$$



$$\bar{y}=\frac{\iint_R y\sigma\,dxdy}{\iint_R \sigma\,dxdy}$$ ，化爲極座標

$$\Rightarrow \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\,drd\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 r^4\cos^2\theta\sin\theta\,drd\theta}=\frac{\frac{243}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta}{\frac{243}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta}$$ ，利用Beta函數

$$=\frac{5}{2}\frac{\frac{1}{2}\beta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}\beta\left(\frac{3}{2},1\right)}=\frac{5}{2}\frac{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}}{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}}=\frac{15\pi}{32}$$

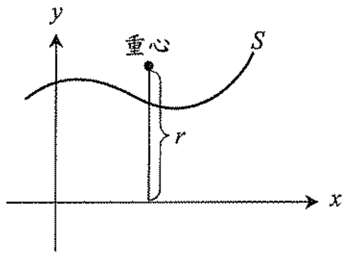
重心的應用——Pappus定理：

重心在幾何學中有一項重大的應用 ──「Pappus 定理」。

1. 求旋轉體表面積：

如下圖，假設曲線長 S，求得線重心後，計算線重心至旋轉軸的距離 r，則旋轉體表面積 A 為：

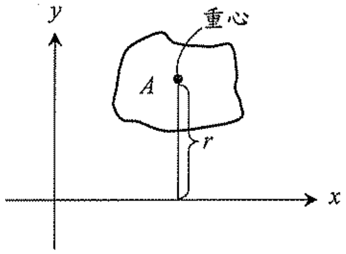
$A = 2\pi r \times S = 2\pi rS$



2. 求旋轉體體積：

如下圖，假設平面面積 A，求得平面重心後，計算線重心至旋轉軸的距離 r，則旋轉體體積 V 為：

$V = 2\pi r \times A = 2\pi rA$



試題 7

Let S be the solid obtained by revolving the region $D = \{(x, y) \mid (x-2)^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$ around the line $y = x$. The volume of S is ?

（85清大）