

113年 台灣大學 財金所 試題詳解 (甲組)

試題

填充題： (每格5分，共100分)

- 產品Y的市場為完全競爭市場，其市場需求函數為： $P = 180 - Q$ ，供給函數為： $P = 60 + \frac{1}{3}Q$ ，其中 P 為每個產品Y的價格（單位為元）。 Q 為數量（單位為萬個）。政府的目標是要讓產品Y市場的生產者剩餘為1,944萬元。為達成此目標，政府考慮執行以下兩種政策中的一種。
政策一：政府以每個 P_G 元的價格無限制收購產品Y。
政策二：生產者每賣出一個產品Y可得到 S 元的政府補貼。
①若政府執行政策一，則其應將 P_G 訂為：(1) 元。
②若政府執行政策二，則其應將 S 訂為：(2) 元。
- 某寡占市場的市場需求永數為 $P = 171 - \frac{1}{3}Q$ ，其中 Q 為市場中所有廠商生產量的總和， P 則為每單位的產品價格。該市場中有三家廠商。每家廠商生產時固定成本為0，每單位的邊際成本則始終為3。每家廠商的決策變數為其自己的產量，又廠商一、廠商二、廠商三的產量分別為 q_1 、 q_2 與 q_3 。
①假設廠商一先決定其產量。觀察到 q_1 後，廠商二與廠商三再同時決定 q_2 與 q_3 。此情況下廠商一的均衡產量為(3)。
②改變①部分的假設。假設廠商一與廠商二先同時決定產量。觀察到 q_1 與 q_2 後，廠商三再決定 q_3 。此情況下廠商一的均衡產量為(4)。
- 甲有一間房子要出售，其可選擇自己賣或賣給乙。若甲自己賣，則扣除所有因賣房而產生的費用後，賣房淨收入將為 V 。甲除非經歷自己賣房子的過程，否則其不知 V 確實的值，而僅知 V 的分配為介於1,200萬元與3,600萬元之間的均等分配（Uniform distribution）。乙為專業房產投資人，其始終知道 V 確實的值，且該房若由乙來賣，則扣除所有因賣房而產生的費用後，賣房淨收入將為 $\frac{4}{3}V$ 。賽局進行如下。①甲決定一售

113
年

價 P 並告知乙。決定 P 時，甲僅知 V 的分配而不知 V 確實的值。②乙決定是否以 P 的價格向甲購買該房後再賣出。若乙買，則甲與乙的報酬分別為 P 與 $\frac{4}{3}V - P$ 。若乙不買，則甲自己賣，此時甲與乙的報酬分別為 V 與 0。參賽者均極大化自己的期望報酬。對甲最適的 P 為 (5) 萬元。均衡時甲的期望報酬為 (6) 萬元。

4. 考慮如下的經濟體系。體系中有 X、Y 兩種財貨且無生產。體系中有第一、第二兩類消費者，消費者人數眾多且兩類消費者人數比例為 1 比 1。每位第一類消費者的效用函數為 $U_1(x_1, y_1) = x_1^2 y_1$ ，其中 x_1 與 y_1 為該消費者財貨 X 與 Y 的消費量。每位第二類消費者的效用函數為 $U_2(x_2, y_2) = x_2 y_2^3$ ，其中 x_2 與 y_2 為該消費者財貨 X 與 Y 的消費量。消費者均為價格接受者，又每位第一類消費者的原賦為：0 單位的 X 與 84 單位的 Y。每位第二類消費者的原賦為：84 單位的 X 與 0 單位的 Y。均衡時每位第一類消費者財貨 X 的消費量為 (7)，每位第二類消費者財貨 Y 的消費量為 (8)。

5. 某人有一子一女，均消費 X 與 Y 兩種財貨。女兒的效用函數為： $U_1(x_1, y_1) = 4 \ln x_1 + 8 \ln y_1$ ，其中 x_1 與 y_1 分別為女兒消費 X 與 Y 的數量， $\ln$ 為自然對數。兒子的效用函數為： $U_2(x_2, y_2) = \max\{x_2, 2y_2\}$ ，其中 x_2 與 y_2 分別為兒子消費 X 與 Y 的數量， $\max$ 為極大值函數，是指大括號內所有數值中的最大值。某人要將 16 單位的 X 與 8 單位的 Y 分給女兒與兒子，其目標為極大化女兒與兒子兩人效用的總和。某人應給女兒 (9) 單位的 Y，給兒子 (10) 單位的 X。

6. 1 月 1 日滿 25 歲的小玲開始在金融業工作，起初沒有任何金融資產，每年薪資所得為 100 萬，每年生活開銷占薪資所得的 70%（即 70 萬），其餘 30%（30 萬）年底時投資在預期報酬率為 4% 的金融資產。定義薪資儲蓄率為薪資所得中作為金融投資的比率，因此小玲的薪資儲蓄率為 30%。小玲設定當金融資產累積超過退休前一年生活花費的 25 倍時就可以退休。除第 ④ 小題外請參考表 1 至表 3 中的資訊來回答問題。

① 在每年薪資、生活花費、薪資儲蓄率都維持固定，且資產報酬率符合預期之下，請問小玲預計最早滿幾歲時可以退休？答案必須是整數。

(11)

②呈上小題，請問小玲滿35歲時預期可累積多少萬元的金融資產？答案必須是整數。 (12)

③小玲在滿35歲時換到新的公司上班，此後每年薪資所得增加為150萬。假設小玲仍維持薪資儲蓄率為30%，且此時累積的金融資產金額達到②的答案。在其他條件不變之下，請問小玲預計最早滿幾歲時可以退休？回答此題時需要考慮小玲獲得加薪後，年生活花費以及達成退休目標所需累積的金融資產金額也隨之增加。答案必須是整數。

(13)

④假設小玲希望獲得加薪後維持退休的年齡與加薪前相同。請問小玲的加薪後的每年的薪資儲蓄 S （即投資在金融資產的金額）需要滿足以下哪一個條件？ $S_0(n)$ 為35歲時預期累積的金融資產（即②的答案）在4%的報酬率下繼續投資 n 年所累積的價值。 $fa(n)$ 代表在4%報酬率之下每年年底投資1元在金融資產，持續 n 年後所累積的價值。 (14)

A. $S_0(19) + fa(19) \times S \geq 25S$

B. $S_0(19) + fa(19) \times (150 - S) \geq 25S$

C. $S_0(19) + fa(19) \times S \geq 25(150 - S)$

D. $S_0(21) + fa(21) \times S \geq 25S$

E. $S_0(21) + fa(21) \times (150 - S) \geq 25S$

F. $S_0(21) + fa(21) \times S \geq 25(150 - S)$

⑤承上小題，定義加薪儲蓄率為加薪後多投資在金融資產的金額占加薪金額的比率，例如若小玲加薪50萬後每年投資在金融資產的金額從30萬增加到40萬，則加薪儲蓄率為 $(40 - 30) / 50 = 20\%$ 。假設小玲希望獲得加薪後維持退休的年齡與加薪前相同。請問小玲的加薪儲蓄率最小應為多少%？答案必須是整數，不需要寫出%符號。 (15)

表1：4%報酬率之下，每年固定投資 y 元，持續 x 年後所累積的價值（元）

		x		
		5	10	15
y	30	162	360	601
	45	244	540	901
	55	298	660	1,101
	60	325	720	1,201

表2：4%報酬率之下，每年年底固定投資 y 元，累積價值達到 x 元所需之時間（年）

		x		
		1,250	1,750	2,625
y	30	25	31	28
	45	19	24	31
	55	16	21	27
	60	15	20	26

表3：4%報酬率之下，期初已有 z 元，每年年底再投資 y 元，累計價值達到 x 元所需之時間（年）

x		$z = 360$			$z = 540$			$z = 600$		
		2,350	2,450	2,625	2,350	2,450	2,625	2,350	2,450	2,625
y	45	22	22	24	19	19	21	17	18	19
	52	20	21	22	17	18	19	16	17	18
	56	19	20	21	17	17	19	15	16	17
	60	19	19	20	16	17	18	15	15	16

7. 2022年發表的一篇跨國研究指出大眾在線上音樂串流媒體平台Spotify聆聽的流行音樂可以代表投資人的情緒，當大多數人聆聽的是相對過去較歡樂、鼓舞的歌曲時，大盤指數將上漲較多。反之，當大多數人聆聽的是較悲傷、抑鬱的歌曲時，大盤指數將下跌較多。以下節錄文章中關於如何利用流行音樂串流次數建構情緒指標的方法，請根據文章內容回答問題。

To measure music sentiment, we collect data from Spotify. Starting from January 1, 2017, Spotify has released, per country, daily statistics of the top-200 songs by the total number of streams. A stream is counted in Spotify only once a song is played for at least 30 seconds; thus, if is a user “passively” listens to a song because it is suggested by Spotify or part of a playlist but promptly skips it, it is not in our data. As of December 2020, Spotify provides data for 70 countries. We only select countries where Spotify data are available since January 1, 2017, and MSCI stock market indices are available from Refinitiv (formerly Thomson Reuters). This procedure results in a total sample of 40 countries over the sample period from January 1, 2017, to December 31, 2020. We identify over 58,000

的短期利率走低。央行採用寬鬆的貨幣政策非常有可能是因應未來可預見的景氣衰退(D)殖利率曲線出現倒掛可能代表市場預期未來的短期利率不變，但中央銀行已採用緊縮的貨幣政策使得目前的短期利率走高。央行採用緊縮貨幣政策的原因可能是為了對抗通貨膨脹，但若打擊通膨的力道太大，有可能使得景氣陷入衰退。

解答

填充題：

1. ①(1) $P_G = 96$ ；

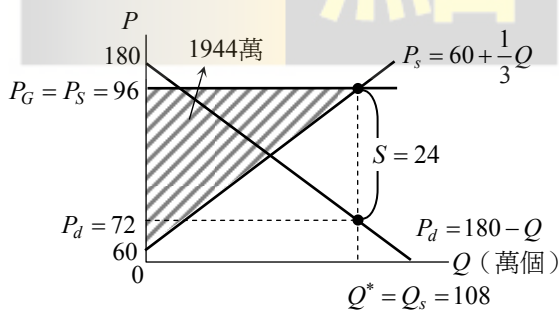
此為餘糧收購政策，政府設定 P_G 的收購價格，要達成生產者剩餘為1,944萬元：

$$PS = \frac{(P_G - 60) \times (3P_G - 180)}{2} = 1944 \rightarrow P_G = 96, 24 \text{ (不合)}, \text{取 } P_G = 96$$

元。

②(2) $S = 24$ ；

此為價差補貼政策，政府的單位補貼 S 需達成生產者剩餘為1,944萬元，只要交易的均衡數量達到與前小題相同，生產者剩餘即可達成目標。生產者願收與消費者願付之間的差距即由政府的單位補貼 S 來彌補。



$$\text{當 } P_G = 96 \rightarrow Q^* = Q_s = 108 \rightarrow P_d = 180 - 108 = 72, \quad P_s = 96 \rightarrow S = P_s - P_d = 96 - 72 = 24$$

2. ①(3) $q_1^* = 252$ ；

$$\text{Max } \pi_2 = \left[171 - \frac{1}{3}(q_1 + q_2 + q_3) \right] q_2 - 3q_2$$

$$\text{F.O.C : } \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0 \quad 171 - \frac{1}{3}(q_1 + 2q_2 + q_3) - 3 = 0$$

$$\rightarrow q_2 = 252 - 0.5(q_1 + q_3) \cdots \cdots RF_2$$

同理可得 $q_3 = 252 - 0.5(q_1 + q_2) \cdots \cdots RF_3$

聯立求解 RF_2, RF_3 可得：

$$q_2 = q_3 = 168 - \frac{1}{3}q_1$$

$$\text{Max } \pi_1 = \left[171 - \frac{1}{3}(q_1 + q_2 + q_3) \right] q_1 - 3q_1$$

$$\text{s.t } q_2 = q_3 = 168 - \frac{1}{3}q_1$$

by reduce form

$$\text{Max } \pi_1 = \left[171 - \frac{1}{3}(q_1 + 168 - \frac{1}{3}q_1 + 168 - \frac{1}{3}q_1) \right] q_1 - 3q_1$$

$$\text{F.O.C : } \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0 \quad 59 - \frac{2}{9}q_1 - 3 = 0 \rightarrow q_1^* = 252$$

$$\textcircled{2} \textcircled{4} q_1^* = 168 ;$$

$$\text{Max } \pi_3 = \left[171 - \frac{1}{3}(q_1 + q_2 + q_3) \right] q_3 - 3q_3$$

$$\text{F.O.C : } \frac{\partial \pi_3}{\partial q_3} = 0 \quad 171 - \frac{1}{3}(q_1 + q_2 + 2q_3) - 3 = 0$$

$$\rightarrow q_3 = 252 - 0.5(q_1 + q_2) \cdots \cdots RF_3$$

$$\text{Max } \pi_1 = \left[171 - \frac{1}{3}(q_1 + q_2 + q_3) \right] q_1 - 3q_1$$

$$\text{s.t } q_3 = 252 - 0.5(q_1 + q_2)$$

by reduce form

$$\text{Max } \pi_1 = \left[171 - \frac{1}{3}(q_1 + q_2 + q_3) \right] q_1 - 3q_1$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[171 - \frac{1}{3}(q_1 + q_2 + 252 - 0.5(q_1 + q_2)) \right] q_1 - 3q_1 \\
 &= \left[87 - \frac{1}{3}(0.5q_1 + 0.5q_2) \right] q_1 - 3q_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{F.O.C : } \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} &= 0 \quad 87 - \frac{1}{3}(q_1 + 0.5q_2) - 3 = 0 \\
 &\rightarrow q_1 = 252 - 0.5q_2 \cdots \cdots RF_1
 \end{aligned}$$

同理可得 $q_2 = 252 - 0.5q_1 \cdots \cdots RF_2$

聯立求解 RF_1 與 RF_2 可得：

$$q_1^* = q_2^* = 168$$

3. (5) $P^* = 2400$ ；

賽局進行的過程為甲先設定 P ，乙再決定是否買下。若乙買下，兩者的報酬為（甲，乙）= $\left(P, \frac{4}{3}V - P\right)$ ；若乙決定不買，兩者的報酬則為

（甲，乙）= $(V, 0)$ 。甲要設定最佳的 P ，在未知 V 值下，甲的目標在於找到乙能接受且對自己最有利的 P 值。乙接受的條件為： $\frac{4}{3}V - P > 0 \rightarrow$

$\frac{4}{3}V > P$ ，已知 $V \sim U(1200, 3600)$ ，計算上述範圍之機率為：

$$\begin{aligned}
 p\left(\frac{4}{3}V > P\right) &= p\left(V > \frac{3}{4}P\right) \\
 &= \int_{\frac{3}{4}P}^{3600} \frac{1}{3600 - 1200} dV = \frac{3600 - \frac{3}{4}P}{2400} = \frac{4800 - P}{3200}
 \end{aligned}$$

$$\text{Max } E(\pi_{\text{甲}}) = p\left(V > \frac{3}{4}P\right) \times P = \frac{4800 - P}{3200} \times P$$

$$\text{F.O.C : } \frac{\partial E(\pi_{\text{甲}})}{\partial P} = 0 \quad \frac{4800 - 2P}{3200} = 0 \rightarrow P^* = 2400$$

(6) $E(\pi_{\text{甲}}) = 1800$ ；

$$E(\pi_{\text{甲}}) = p\left(V > \frac{3}{4} \times 2400\right) \times 2400 = \frac{4800 - 2400}{3200} \times 2400 = 1800$$

4. (7) $x_1^d = 63$ ， $y_2^* = 56$ ；

$$\text{Max } U_1 = x_1^2 y_1$$

$$\text{s.t. } Px_1 + y_1 = 84, \quad P = \frac{P_x}{P_y}$$

$$x_1^d = \frac{56}{P}, \quad y_1^d = 28$$

$$\text{Max } U_2 = x_2 y_2^3$$

$$\text{s.t. } Px_2 + y_2 = 84P, \quad P = \frac{P_x}{P_y}$$

$$x_2^d = 21, \quad y_2^d = 63P$$

$$x \text{ 市場均衡下 } x^d = x_1^d + x_2^d = x^s \rightarrow \frac{56}{P} + 21 = 84 \rightarrow P^* = \frac{56}{63}$$

$$x_1^d = \frac{56}{P} = \frac{56}{56/63} = 63$$

$$(8) y_2^* = 56;$$

$$y_2^* = 63P = 63 \times \frac{56}{63} = 56$$

$$5. (9) y_1^* = 8; (10) x_2^* = 12;$$

$$\text{Max } U = U_1 + U_2 = 4 \ln x_1 + 8 \ln y_1 + \max\{x_2, 2y_2\}$$

Case 1 : if $x_2 \geq 2y_2$

$$\text{Max } U = U_1 + U_2 = 4 \ln x_1 + 8 \ln y_1 + x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 = 16, \quad y_1 + y_2 = 8$$

由於 y_2 不帶來效用，因此

$$y_2^* = 0 \rightarrow y_1^* = 8$$

又 $x_2 = 16 - x_1$ 代回目標式可得

$$\text{Max } U = U_1 + U_2 = 4 \ln x_1 + 8 \ln y_1 + 16 - x_1$$

$$\text{F.O.C : } \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{4}{x_1} - 1 = 0 \rightarrow x_1^* = 4, \quad x_2^* = 12$$

$$U = 4 \ln 4 + 8 \ln 8 + 16 - 4 = 4 \ln 2^2 + 8 \ln 2^3 + 12 = 32 \ln 2 + 12$$

Case 2 : if $x_2 \leq 2y_2$

$$\text{Max } U = U_1 + U_2 = 4 \ln x_1 + 8 \ln y_1 + 2y_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 = 16, \quad y_1 + y_2 = 8$$

由於 x_2 不帶來效用，因此 $x_2^* = 0 \rightarrow x_1^* = 16$

又 $y_2 = 8 - y_1$ 代回目標式可得

$$\text{Max } U = U_1 + U_2 = 4 \ln x_1 + 8 \ln y_1 + 2(8 - y_1)$$

$$\text{F.O.C : } \frac{\partial U}{\partial y_1} = 0 \quad \frac{8}{y_1} - 2 = 0 \rightarrow y_1^* = 4, \quad y_2^* = 4$$

$$U = 4 \ln 16 + 8 \ln 4 + 2(8 - 4) = 4 \ln 2^4 + 8 \ln 2^2 + 8 = 32 \ln 2 + 8$$

Case 1 效用高於 Case 2，因此最適解為：

$$x_1^* = 4, \quad x_2^* = 12, \quad y_1^* = 8, \quad y_2^* = 0$$

6. ① ① 31；

根據表2，當 $y = 30, x = 70 \times 25 = 1,750$ ，則所需的時間為31年。

【觀念推論】

假設此人於 t 年後退休，當時此人的年紀為 $25 + t$ 歲

滿25歲的那年，儲蓄30萬經過 t 年後可得到 $30(1 + 4\%)^{t-1}$

滿26歲的那年，儲蓄30萬經過 $t - 1$ 年後可得到 $30(1 + 4\%)^{t-2}$

依此類推，退休的前一年將是 $25 + t - 1$ 歲

滿 $25 + t - 1$ 歲時，最後一筆儲蓄為30萬，儲蓄完後就到達退休年齡 $25 + t$ 歲

$$\text{儲蓄總額} = 30(1 + 4\%)^{t-1} + 30(1 + 4\%)^{t-2} + \cdots + 30$$

$$= \frac{30[1 - (1 + 4\%)^{t-1}]}{1 - (1 + 4\%)}$$

前一年的生活花費為70萬元，25倍則需要達成 $70 \times 25 = 1,750$ 萬元

$$\frac{30[1 - (1 + 4\%)^{t-1}]}{1 - (1 + 4\%)} = 1,750 \rightarrow t \approx 31.1$$

② ① 360；

根據表1，當 $y = 30, x = 10$ ，能得到的金額為360萬元。

③ ① 59；

年薪調整為150萬元，儲蓄率30%，金額為45萬元，年花費為105萬元，25倍則有 $105 \times 25 = 2,625$ 萬元，在35歲這一年，儲蓄已有360萬元，根據表3，當 $z = 360, y = 45, x = 2,625$ ，尚需的時間為24年，因此退休年齡為 $35 + 24 = 59$ 歲。

④ ① 4 F.；

由於原本預計31年後即可退休，35歲時從25歲起算已經經過10年，原本的儲蓄還需繼續投資21年，表達為 $S_0(21)$ 。原訂於 $25 + 31 = 56$

歲時退休，35歲距離原訂退休年紀56歲還有21年的時間，此部分的投資記做 $f_a(21) \times S$ ，合計的儲蓄總額 $S_0(21) + f_a(21) \times S$ 需大於25倍的退休前一年支出 $(150 - S)$ ，記做 $25(150 - S)$ ，結合以上，條件為：

$$S_0(21) + f_a(21) \times S \geq 25(150 - S)$$

⑤ (15)44：

在35歲這一年，已經過10年，儲蓄也已有360萬元，年薪調整為150萬元後：儲蓄金額若為45萬元，年花費為105萬元，25倍則有 $105 \times 25 = 2,625$ 萬元，根據表3，當 $z = 360, y = 45, x = 2,625$ ，尚需的時間為24年，共需 $10 + 24 = 34$ 年才到退休年齡，超過原定的31年；儲蓄金額若為52萬元，年花費為98萬元，25倍則有 $98 \times 25 = 2,450$ 萬元，當 $z = 360, y = 52, x = 2,450$ ，尚需的時間為21年，共需 $10 + 21 = 31$ 年能到退休年齡，符合原定目標，故加薪儲蓄率 $= \frac{52 - 30}{50} = 44\%$ 。

7. ① (16)(A),(B)：

Valence是MIT的實驗室透過機器學習評估出來的指標，由Spotify取得後提供，且該指標僅針對音樂本身，並不針對歌詞內容進行評估。

② (17)(B),(D)：

(A)作者先計算各國每天串流次數最高的100首歌曲的加權平均Valence（簡稱SWAV），以串流次數為權重——錯誤。根據原文，SWAV是基於每天每個國家前200首歌曲的加權平均Valence，而不是100首。對應原文段落：“We construct a stream-weighted average valence (henceforth *SWAV*) across the top-200 songs for each day and country.”

(B)若一首歌曲播放不到30秒就被跳過，則不計入串流次數中——正確。文章明確指出，只有歌曲被播放至少30秒才會計入串流次數，若不到30秒則不計算在內。對應原文段落：“...Spotify only counts a song as played once it is played for at least 30 seconds, thus, if a user ‘passively’ listens to a song but promptly skips it, it is not in our data.”

(C)Music Sentiment是一國某周周五的SWAV與上周周五SWAV的差