Chapter 27

極限與微積分

一、極限計算型

㈠約分型

1. 因式分解型：

【例】 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{2x^2+7x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-3}{2x+1}=\dfrac{6}{5}$

2. 有理化型：

【例】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)-(1-2x)}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x})}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x}}=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}$$

㈡無窮型

1. 單項指數型：

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\begin{cases}\infty\cdots\cdots r>1\\ 1\ \cdots\cdots r=1\\ 0\ \cdots\cdots -1<r<1\\ \text{振動}\cdots r=-1\end{cases}$$

【註】“∞” 和 “振動” 均為不存在。

2. 多項分式型：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0 & \cdots\cdots n<m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & \cdots\cdots n=m\\ \infty & \cdots\cdots n>m\text{且}a_n\times b_m>0\\ -\infty & \cdots\cdots n>m\text{且}a_n\times b_m<0\end{cases}$$

㈢指數型

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

㈣三角函數型

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ； $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$　　2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$ ； $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$　　4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ ； $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

㈤夾擊定理型

若 $f(x)\le g(x)\le h(x)$ 於x之定義域內恆成立，且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=L$ ，則 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$ ，稱之爲夾擊定理（Squeeze Theorem）。

二、極限應用求漸近線

㈠垂直漸近線

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty \Leftrightarrow f(x)$有垂直漸近線　$x=a$

㈡水平漸近線

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=b \Leftrightarrow f(x)$有水平漸近線　$y=b$

㈢斜漸近線

若 $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=m$，且 $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=b$，則 $y=mx+b$ 爲一斜漸近線。

三、簡易微分公式型

㈠多項式微分

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

則 $f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$

㈡指數函數微分

1. $\frac{d}{dx}e^x=e^x$
2. $\frac{d}{dx}a^x=a^x\times\ln a$
3. $\frac{d}{dx}e^{f(x)}=e^{f(x)}\times f'(x)$
4. $\frac{d}{dx}a^{f(x)}=a^{f(x)}\times\ln a\times f'(x)$

㈢對數函數微分

1. $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$
2. $\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{\ln a\times x}$
3. $\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{f'(x)}{\ln f(x)}$
4. $\frac{d}{dx}\log_a f(x)=\frac{f'(x)}{\ln a\times x}$

㈣三角函數微分

1. $\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$ ； $\frac{d}{dx}\sin f(x)=\cos f(x)\times f'(x)$
2. $\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$ ； $\frac{d}{dx}\cos f(x)=-\sin f(x)\times f'(x)$
3. $\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$ ； $\frac{d}{dx}\tan f(x)=\sec^2 f(x)\times f'(x)$
4. $\frac{d}{dx}\cot x=-\csc^2 x$ ； $\frac{d}{dx}\cot f(x)=-\csc^2 f(x)\times f'(x)$
5. $\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\times\tan x$ ； $\frac{d}{dx}\sec f(x)=\sec f(x)\times\tan f(x)\times f'(x)$
6. $\frac{d}{dx}\csc x=-\csc x\times\cot x$ ； $\frac{d}{dx}\csc f(x)=-\csc f(x)\times\cot f(x)\times f'(x)$

答：(D)；

(A)由 $f(x) = 4x^2 - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x^2(x-1) = 0$ 得 $x = 0$，$x = 1$ 為零點

(B)由 $f'(x) = 8x - 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x(2-3x) = 0$ 得 $x = 0$，$x = \dfrac{2}{3}$ 為臨界點

(C)因 $f''(x) = 8 - 24x \Rightarrow \begin{cases} \text{由} f''(0) = 8 > 0 & \text{得} f(0) = 0 \text{為相對極小值} \\ \text{由} f''\left(\dfrac{3}{2}\right) = -8 < 0 & \text{得} f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{16}{27} \text{為相對極大值} \end{cases}$

由 $f(0) = 0 < f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{16}{27}$，故相對極大值為 $\dfrac{16}{27}$

(D)由 $f''(x) = 8 - 24x = 0 \Rightarrow$ 得 $x = \dfrac{1}{3}$ 時 $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{8}{27}$，故反曲點為 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{8}{27}\right)$

⇒綜上所述，選項(D)非正確

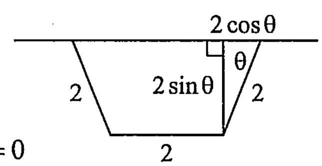
試題12

某人在牆邊使用3枝2公尺長的木條，圍成四邊形的最大面積為多少平方公尺？（木條不能折斷） 【91年高雄市國小教甄】

答：如圖，令 $A(\theta) = \dfrac{1}{2} \times [2 + (2 + 4\cos\theta)] \times 2\sin\theta$

$= 4(1 + \cos\theta) \cdot \sin\theta$

$= 4\sin\theta + 2\sin 2\theta$



由 $A'(\theta) = 4\cos\theta + 4\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta + \cos 2\theta = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$，得 $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

所求 $A(\theta)$ 之 $\max = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$（平方公尺）

試題13

極限 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)}{6n^2 + 100} = ?$ (A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{1}{6}$。

【96年台北縣國中教甄】

答：(D)；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{6n^2+100}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{6n^2+100}\cdot\frac{(1+2n-1)\times n}{2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{2(6n^2+100)}=\frac{1}{6}$$

試題14

積分 $\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$ 的值為何？（lnx為自然對數） (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) ∞。 【96年基隆市市立國中教甄】

答：(B)；

$\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{\ln x}{x^2}dx\cdots\cdots$ ①

式中 $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$ 令 $t=\ln x$，則 $dt=\frac{1}{x}dx$，又 $x=e^t$，

$\therefore\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\int e^{-t}\cdot t\,dt$ 再令 $u=t$，$dv=e^{-t}dt$，

則 $du=dt$，$v=-e^{-t}$，$\therefore$原式 $=-te^{-t}+\int e^{-t}\cdot dt=-te^{-t}-e^{-t}$

$=-e^{-t}(t+1)=\frac{-(\ln x+1)}{x}$ 代入①

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{\ln x}{x^2}dx=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\ln x+1}{x}\right)\Bigg|_1^b$$

$$=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\ln b+1}{b}-\frac{\ln 1+1}{1}\right)=-\left(\lim_{b\to\infty}\frac{\frac{1}{b}}{1}-1\right)=-(0-1)=1$$

試題15

$\frac{x}{9x^4+6x^2+1}$ 的反導函數為： (A) $\frac{1}{6(3x^2+1)}+c$ (B) $\frac{-1}{6(3x^2+1)}+c$ (C) $\frac{6}{3x^2+1}+c$ (D) $\frac{-6}{3x^2+1}+c$。 【96年桃園縣國中教甄】

答：(B)；

所求 $=\int \frac{x}{9x^4+6x^2+1}dx=\int \frac{x}{(3x^2+1)^2}dx$

令 $t=3x^2+1$，則 $dt=6xdx$

原式 $=\int \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{6}dt=\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)+c=-\frac{1}{6(3x^2+1)}+c$

試題16

設 $f(x)=2^x$，則 $f(x)$ 的 n 階導數 $f^{(n)}(x)$ 爲： (A) 2^x (B) 2^{nx} (C) $(\ln 2)^n\cdot 2^x$ (D) $(\ln 2)\cdot 2^x$。 【96年桃園縣國中教甄】

答：(C)；

$f(x)=2^x$

$f'(x)=2^x\cdot\ln 2$

$f''(x)=2^x\cdot\ln 2\cdot\ln 2=2^x\cdot(\ln 2)^2$

$\vdots$

$\vdots$

故 $f^{(n)}(x)=2^x\cdot(\ln 2)^n$

試題17

$x^3+y^3-6xy=0$ 在點 $P(3,3)$ 的法線方程式爲 $ax+y+c=0$，則 $2a+c=$？ (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2。 【96年桃園縣國中教甄】

答：(A)；

設 $F(x,y)=x^3+y^3-6xy=0$

由過P之切線斜率 $m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)}=-\left.\frac{Fx}{Fy}\right|_{(3,3)}=-\left.\frac{3x^2-6y}{3y^2-6x}\right|_{(3,3)}=-1$

得法線方程式爲 $y-3=-\frac{1}{m}(x-3)=(x-3)$

$\Rightarrow$即 $x-y=0\Rightarrow -x=0$，$\therefore a=-1$，$c=0$，故 $2a+c=-2$