



Chapter 1

線性規劃

1.1 線性規劃基本概念

範題 1

Convert the following problem into a linear program in standard form.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= |x_1| + 3|x_2| - |x_3| \\ \text{s.t. } 2x_1 + 5|x_2| - 2x_3 &\leq 60 \\ |x_1 + x_2| + x_3 &\leq 18 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 44 \\ +\infty \geq x_i \geq -\infty, \quad i &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

答：令 $|x_1| = x_1^+ + x_1^-$, $|x_2| = x_2^+ + x_2^-$, $|x_3| = x_3^+ + x_3^-$, $x_1 = x_1^+ - x_1^-$,
 $x_2 = x_2^+ - x_2^-$, $x_3 = x_3^+ - x_3^-$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x_1^+ + x_1^- + 3x_2^+ + 3x_2^- - x_3^+ - x_3^- \\ \text{s.t. } \frac{2}{5}x_1^+ - \frac{2}{5}x_1^- + x_2^+ - x_2^- - \frac{2}{5}x_3^+ + \frac{2}{5}x_3^- &\leq 12 \\ \frac{2}{5}x_1^+ - \frac{2}{5}x_1^- - x_2^+ + x_2^- - \frac{2}{5}x_3^+ + \frac{2}{5}x_3^- &\leq 12 \\ x_1^+ - x_1^- + x_2^+ - x_2^- + x_3^+ - x_3^- &\leq 18 \\ -x_1^+ + x_1^- - x_2^+ + x_2^- + x_3^+ - x_3^- &\leq 18 \\ 3x_1^+ - 3x_1^- + x_2^+ - x_2^- &\leq 44 \\ x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, x_3^+, x_3^- &\geq 0 \end{aligned}$$

範題 2

Convert the following problem into a linear program in standard form.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \text{minimize } \{2x_1 + x_2, x_1 - 2x_2\} \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 44 \\ & x_1 \geq 1, x_2 \geq -5 \end{aligned}$$

答：令 $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 + 5$
 $Z = \text{minimize}\{2x_1 + x_2, x_1 - 2x_2\}$

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z \\ \text{s.t.} \quad & -y_1 + 2y_2 \leq 26 \\ & y_1 + y_2 \leq 16 \\ & 5y_1 + 3y_2 \leq 54 \\ & 2y_1 + y_2 - 3 \geq Z \\ & y_1 - 2y_2 + 11 \geq Z \\ & y_1, y_2 \geq 0, Z \text{ is unrestricted in sign} \end{aligned}$$

範題 3

Convert the following problem into a linear program in standard form.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = |x_1 - 3| + |x_2 + 2| \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 44 \\ & +\infty \geq x_i \geq -\infty, i = 1, 2 \end{aligned}$$

答：令 $y_1 = x_1 - 3, y_2 = x_2 + 2$
 $|y_1| = y_1^+ + y_1^-, |y_2| = y_2^+ + y_2^-$
 $y_1 = y_1^+ - y_1^-, y_2 = y_2^+ - y_2^-$
 $\text{Max } Z = y_1^+ + y_1^- + y_2^+ + y_2^-$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & y_1^+ - y_1^- + y_2^+ - y_2^- \leq 9 \\ & y_1^+ - y_1^- - 2y_2^+ + 2y_2^- \geq -5 \\ & y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \geq 0 \end{aligned}$$

範題 4

Convert the following problem into a linear program in standard form.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = x_1^3 + x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1^3 + x_2 \leq 10 \\ & 2x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

答：令 $y_1 = x_1^3$

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = y_1 + x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + x_2 \leq 10 \\ & 2x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ & y_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

範題 5

將下面LP問題轉換成決策變數全部為非負的形式：

$$\begin{aligned} (1) \text{Max} \quad & Z = 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{Min} \quad & Z = |x_1| + |x_2| \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 - 2x_2 = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{Max} \quad & Z = x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 - 2x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 1 \end{aligned}$$

1-4 作業研究習題解析

$$(4) \text{ Min } Z = |x_1 - 5| + |x_2 - 4|$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 - 3x_2 \geq 2$$

答 : (1) Max $Z = 2x_1^+ - 2x_1^- - x_2$

$$\text{s.t. } 2x_1^+ - 2x_1^- + 3x_2 \geq 2$$

$$x_1^+ - x_1^- + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1^+, x_1^-, x_2 \geq 0$$

(2) Min $Z = x_1^+ + x_1^- + x_2^+ + x_2^-$

$$\text{s.t. } x_1^+ - x_1^- + x_2^+ - x_2^- \leq 8$$

$$x_1^+ - x_1^- - 2x_2^+ + 2x_2^- = 12$$

$$x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^- \geq 0$$

(3) Let $x_1 - 1 = x_1'$, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$

$$\text{Max } Z = x_1' - 3x_2^+ + 3x_2^- + 1$$

$$\text{s.t. } 2x_1' + x_2^+ - x_2^- \leq 1$$

$$x_1' - 2x_2^+ + 2x_2^- \geq 5$$

$$x_1' \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0$$

(4) Let $x_1 - 5 = y_1$, $x_2 - 4 = y_2$

$$\text{Min } Z = |y_1| + |y_2|$$

$$\text{s.t. } y_1 + y_2 \leq -1$$

$$y_1 - 3y_2 \geq 9$$

$$y_1 \in R, y_2 \in R$$

⇒

$$\text{Min } Z = y_1^+ + y_1^- + y_2^+ + y_2^-$$

$$\text{s.t. } y_1^+ - y_1^- + y_2^+ - y_2^- \leq -1$$

$$y_1^+ - y_1^- - 3y_2^+ + 3y_2^- \geq 9$$

$$y_1^+ \geq 0, y_1^- \geq 0, y_2^+ \geq 0, y_2^- \geq 0$$

1.2 模式建立(LP modeling)

範題 1

韓旭公司有甲、乙、丙、丁四種生產資源，可生產 P_1 、 P_2 、 P_3 三種產品，現將各種資源的數量，以及各項資料列於下表。試問如何安排生產排程企業方能獲取最大利潤，試建立LP模式。

資源 \ 產品	產品			現有資源數
	P_1	P_2	P_3	
甲	1	2	2	200
乙	3	4	3	350
丙	4	1	2	270
丁	2	1	1	350
單位利潤	10	7	5	

答：令產品 P_1 可以生產 x_1 單位。

P_2 可以生產 x_2 單位。

P_3 可以生產 x_3 單位。

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 7x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 200$$

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 350$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 270$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 350$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

範題 2

韓旭飼料調配廠由五種飼料混合而成，各種飼料每單位所含的營養成分如下表所示。

1-6 作業研究習題解析

	每單位所含營養成分				價格 (每單位)
	鐵	鈣	蛋白質	維生素	
玉米	0.18	0.16	0.01	0.0007	1.2
大麥	0.08	0.02	0.005	0.0022	1.05
燕麥	0.12	0.08	0.014	0.0027	0.95
大豆	0.05	0.03	0.0009	0.0015	1.08
黃豆	0.52	0.10	0.022	0.0018	0.85

若要求所配製的飼料每單位營養標準要求：鐵質不少於20%；鈣質不少於5%；蛋白質不少於1%，但不大於1.5%；維生素不少於0.45%，但不大於0.8%，請建構線性規劃模式。

答：令玉米使用的比例為 x_1 。

大麥使用的比例為 x_2 。

燕麥使用的比例為 x_3 。

大豆使用的比例為 x_4 。

黃豆使用的比例為 x_5 。

$$\text{Min } Z = 1.2x_1 + 1.05x_2 + 0.95x_3 + 1.08x_4 + 0.85x_5$$

$$\text{s.t. } 0.18x_1 + 0.08x_2 + 0.12x_3 + 0.05x_4 + 0.52x_5 \geq 0.2$$

$$0.16x_1 + 0.02x_2 + 0.08x_3 + 0.03x_4 + 0.1x_5 \geq 0.05$$

$$0.01 \leq 0.01x_1 + 0.005x_2 + 0.014x_3 + 0.0009x_4 + 0.022x_5 \leq 0.015$$

$$0.0045 \leq 0.0007x_1 + 0.0022x_2 + 0.0027x_3 + 0.0015x_4$$

$$+ 0.0018x_5 \leq 0.008$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

範題 3

韓旭公司需將一批長10公尺的原料，切割成下面三種長度。長度規格及需求如下：

第一種規格長6公尺需求80根。

第二種規格長4公尺需求130根。

第三種規格長3公尺需求180根。

試問如何進行切割，可使得所用原料最少。（建構線性規劃模式，不必求解）

答：原料共有如右圖五種切割方式
令setting i 使用 x_i 根材料進行切割。

$$i = 1 \sim 5$$

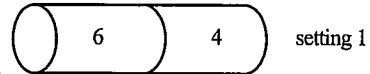
$$\text{Min } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \geq 80$$

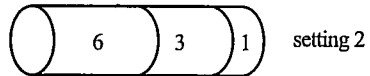
$$x_1 + 2x_3 + x_4 \geq 130$$

$$x_2 + 2x_4 + 3x_5 \geq 180$$

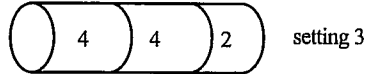
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \text{ 且為整數}$$



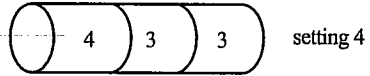
setting 1



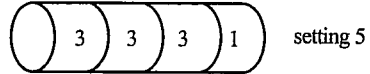
setting 2



setting 3



setting 4



setting 5

範題 4

韓旭老師在今後五年有以下投資方案：

方案A：每年年初投資，兩年後回收投資金額130%。

方案B：每年年初投資，三年後回收本金150%。

方案C：第二年初投資，第五年結束回收本金170%。

方案D：第五年初投資，第五年結束回收本金120%。

現在韓旭老師手中握有10,000元資金，應如何投資，使得第五年結束後，收益最大。

答：令 x_{ij} 表示第 i 年投資 j 方案的金額， L_i 為第 i 年末投資金額。