* **9c** 範例:《凸組合的幾何直覺》

補充資料請參閱光碟

§2. 衍生空間

10 定義:《子空間》

對向量空間$(V, K, +, \cdot)$, 及非空集合$S\subseteq V$, 若$(S, K, +, \cdot)$也是向量空間,就稱$(S, K, +, \cdot)$是$(V, K, +, \cdot)$的子空間(*subspace*), 記為$(S, K, +, \cdot) \leq (V, K, +, \cdot)$, 簡記為 $S\leq V$.

【要訣】(1)子空間與原先的空間使用同一個體.

(2)若S使用V的運算, 而仍為向量空間, 就稱S為V的子空間.

(3)S所使用的$+$, $\cdot$, 嚴格說來是把原來的定義域$V\times V$及$K\times V$分別限制在$S\times S$及$K\times S$上而得.

(4)V本身以及$\{\boldsymbol{o}\}$都是V的子空間, 這兩個子空間稱為V的顯然子空間(*trivial subspace*). 其他的子空間稱為非顯然子空間(*nontrivial subspace*).

(5)除了V自己以外, V其他的子空間都叫做V的適當子空間(*proper subspace*).

*(6) 子空間關係$\leq$是向量空間之間的一個偏序(*partial order*)

11 定理:《子空間判別定理》

設V為佈於K的向量空間.

①對V的非空子集S, 下列各敘述等價:

(i) S是V的子空間.

(ii) (a) $\forall\, \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in S$, 必 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\in S$, 《向量加法的封閉性》

(b) $\forall c\in K, \forall \boldsymbol{u}\in S$, 必$c\boldsymbol{u}\in S$. 《係數積的封閉性》

(iii) $\forall\, c, d\in K, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in S$, 必$c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}\in S$.

(iv) $\forall\, c\in K, \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in S$, 必 $c\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\in S$.

(ⅴ) $\forall k\in\mathbb{Z}^+, \forall\, c_1, c_2, \ldots, c_k\in K, \forall\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\in S,$

必 $c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\ldots+c_k\boldsymbol{v}_k\in S$ 《線性組合的封閉性》

②對V的非空子集S, 若上述①(ⅱ)(b)成立, 則

(a) $\boldsymbol{o}\in S,$ (b) $\forall \boldsymbol{v}\in S, -\boldsymbol{v}\in S$.

③若W是V的子空間, 則 $\boldsymbol{o}\in W.$

【要訣】(1) 證明S爲V的子空間時, 通常使用①的(ⅱ)或(ⅲ).
在情況簡單時, 用(ⅲ)一次完成; 若較複雜, 可用(ⅱ)分兩部份證明.

(2) 本定理③指出W是子空間的兩個必要條件, 它們常被用來反證W不是子空間.

◎ (3) 普通的$\mathbb{R}^3$空間中, 除了顯然子空間外, 子空間就是通過原點的直線或平面. 普通的$\mathbb{R}^2$空間中, 除了顯然子空間外, 子空間就是通過原點的直線. 普通的$\mathbb{R}^1$空間中, 只有顯然子空間.

補充資料請參閱光碟

11a 定理:《多層子空間的性質》

若W是V的子空間, 而$S\subseteq W$, 則:

S是V的子空間 $\Longleftrightarrow$ S是W的子空間

【要訣】本定理常被引用. 但因沒有名字, 所以被引用時並不明顯.

【證】由前提, S已同時是W及V的子集合.

S是V的子空間 $\Longleftrightarrow$ S非空且具備封閉性 (定理11)

$\Longleftrightarrow$ S是W的子空間 (定理11)

12 範例:《tuple space中以參數描述的子空間》

下列各題中, S是否爲向量空間V的子空間? 若判斷爲“是”, 需給出證明.
若判斷爲“非”, 需解釋理由.

①$V=\mathbb{R}^2, S=\{\, (t, -t) \mid t\in\mathbb{R}\,\}$.

②$V=\mathbb{R}^2$, $S=\{ (t, 1-t) \mid t\in\mathbb{R} \}$.

③$V=\mathbb{R}^3$, $S=\{ (s, t, 3s-2t) \mid s, t\in\mathbb{R} \}$.

④$V=\mathbb{R}^3$, $S=\{ (\cos t, \sin t, 0) \mid t\in\mathbb{R} \}$.

⑤$V=\mathbb{R}^2$, $S=\{ (n, m) \mid n, m\in\mathbb{Z} \}$.

【要訣】(1) 向量空間未註明所佈之係數體時, 依上下文自行判定(通常是$\mathbb{R}$).
運算沒有特別說明時, 就用最普通的運算.

(2) S不具封閉性 $\Longleftrightarrow$
“ ($\exists \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\in S$ 使$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\notin S$) 或 ($\exists \boldsymbol{v}\in S, \exists k\in K$,使$k\boldsymbol{v}\notin S$) ”

【解】①是. 以下用定理11①(iii)證明:

對任意$a,b\in\mathbb{R}$, 及任意$(x, -x), (y, -y)\in S$,
$a(x, -x)+b(y, -y) = (ax+by, -(ax+by))\in S$

②否. 反例如下:

$(0, 1), (1, 0)\in S$, 但$(0, 1)+(1, 0) = (1, 1)\notin S$.
違反向量加法的封閉性.

③是. 以下用定理11①(ii)證明:

(a)$\forall\ (s_1, t_1, 3s_1-2t_1), (s_2, t_2, 3s_2-2t_2)\in S$,

$$(s_1, t_1, 3s_1-2t_1)+(s_2, t_2, 3s_2-2t_2)$$
$$= (s_1+s_2, t_1+t_2, 3(s_1+s_2)-2(t_1+t_2)) \in S$$

(b)$\forall a\in\mathbb{R}$, $\forall (s, t, 3s-2t)\in S$;

$$a(s, t, 3s-2t) = (as, at, 3(as)-2(at))\in S$$

④否. 讀者自找反例.

⑤否. 反例如下:

$(1, 1)\in S$, 但 $(1/2)(1, 1) = (1/2, 1/2)\notin S$.
違反係數積的封閉性.

習題12.1 (是非倒扣題) (清大87工工[1-9])
設V爲xy-平面上的第二象限(second quadrant), 則V是個向量空間.