12 對角化

線上資訊

請定期瀏覽廖亦德老師的線代專業網 http://linear.ttnet.net

概要與指引

“對角化”與“秩”並列爲線性代數的兩大重點. 任何一本線性代數的書, 縱使取材各有不同, 也都一定會討論到這兩個題材.

對角化以特徵向量與特徵值爲基礎, 第一節介紹它們的求算法. 首先要由特徵多項式解出特徵值(定理7, 定義8). 然後再利用高斯消去法由各個特徵值求出特徵子空間. 特徵子空間中的非零向量就是特徵向量(定義8要訣1).

對角化有兩種說法. 從線性算子T的角度看,對角化就是找一組特徵向量來當做基底. 這時T相對於這基底的矩陣表示就會是一個對角線矩陣 (定理16) . 從矩陣A的角度看, 對角化就是要使A相似於一個對角線矩陣. 乍看之下, 這兩種說法似乎沒什麼相關, 但我們若將A看成一個線性映射(CH7定義9要訣3), 就可發現這兩種說法本質上並無不同(CH7定理19). 有許多書只談到矩陣的說法, 但整個理論必須從線性算子的角度觀察才能徹底了解.

對角化的計算較簡單, 學習上應該沒有困難. 除了計算以外, 讀者還必須多注意對角化的理論(定理21, 定理23).

§1. 特徵值與特徵向量

1 定義:《特徵值與特徵向量》

① 設$T\in\mathscr{L}(V)$, 對非零向量$\boldsymbol{v}\in V$, 若存在純量k使$T\boldsymbol{v}=k\boldsymbol{v}$, 則稱$\boldsymbol{v}$是$T$的一個特徵向量(*characteristic vector*), 也稱固有向量(*eigenvector*). 而稱k爲$\boldsymbol{v}$的特徵值(*characteristic value*), 也稱固有值(*eigenvalue*).

② 對矩陣$A\in K^{n\times n}$及非零向量$\boldsymbol{x}\in K^{n\times 1}$, 若存在$k\in K$使$A\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}$, 則稱$\boldsymbol{x}$是$A$的一個特徵向量(也稱固有向量). 而$k$稱爲$\boldsymbol{x}$的特徵值(也稱固有值).

【要訣】(1) 特徵向量就是經映射後不改變方向(只允許伸長, 縮短, 或反向)的非零向量.

(2)特徵值可以是0, 但通常規定特徵向量不可以是零向量.

(3)Ker$T$裏面的向量除了$\boldsymbol{o}$以外都是特徵向量, 它們的特徵值都是0.

(4)同一個特徵向量只能有一個特徵值:

$$T\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{v},\ T\boldsymbol{v}=\lambda_2\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{o}\implies\lambda_1=\lambda_2\ .$$

(5)對常數c及常數映射$T(\boldsymbol{x})=c\boldsymbol{x}$, 每個非零向量都是特徵向量.

2 範例:《特徵向量的觀念》

設$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-5\end{bmatrix}$, 試找出$A$的所有特徵向量.

【註】本例只用來闡述觀念, 並非標準解法, 對此例的線性映射$\boldsymbol{x}\longrightarrow A\boldsymbol{x}$應培養幾何感覺.

【解】

令$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$，則$A\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ -5z \end{bmatrix}$

$$A\begin{bmatrix} t \\ s \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2t \\ 2s \\ 0 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} t \\ s \\ 0 \end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5t \end{bmatrix}=-5\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

∴ xy平面及z軸上的非零向量都是特徵向量.

設$z\neq 0$且x, y不全為0,

若$x\neq 0$, 則$2x/x\neq -5z/z$; 若 $y\neq 0$, 則 $2y/y\neq -5z/z$;

∴$A\boldsymbol{v}$不平行於$\boldsymbol{v}$.

∴ 沒有其他特徵向量 .

3 定理:《特徵向量的封閉性》

①若$\boldsymbol{v}$是特徵向量, 則對任意純量$c\neq 0$, $c\boldsymbol{v}$也是特徵向量, 且具有同一個特徵值.

②設$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$是$T$的特徵向量, 各以$\lambda_1,\lambda_2$為特徵值, 且$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\neq \boldsymbol{o}$.

(a) 若$\lambda_1=\lambda_2$, 則$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$也是特徵向量.

(b) 若$\lambda_1\neq\lambda_2$, 則$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$不是特徵向量.

【要訣】(1) 一個特徵向量只能配一個特徵值, 但一個特徵值配有無限多個特徵向量.

† 【證】 補充資料請參閱光碟

4 定理:《常數映射的特徵向量》

設V是佈於K的向量空間, 而$T: V\longrightarrow V$是V上的線性映射. 則:

T是常數映射 $\Longleftrightarrow$ 每個非零向量都是T的特徵向量, .