$$y(x)=\frac{x-\frac{1}{3}x^3+1}{1-x^2}$$

範題 1.54

試解下列O.D.E.

$$y'+y\tan x=\sin 2x \text{，} y(\pi)=4$$

Ans：

原式為一階線性O.D.E.（$P(x)=\tan x$，$Q(x)=\sin 2x$）

則積分因子為

$$I(x)=\exp[\int P(x)dx]=\exp[\int \tan x dx]=\exp[\ell n \sec x]=\sec x$$

代入一階線性O.D.E.之通解公式

$$y\cdot I(x)=\int Q(x)\cdot I(x)dx+c$$

故 $y\cdot \sec x=\int \sin 2x\cdot \sec x dx+c$

$$=\int (2\sin x\cos x)\cdot\frac{1}{\cos x}dx+c$$

$$=\int 2\sin x dx+c=-2\cos x+c$$

經移項整理

$$y(x)=-2\cos^2 x+c\cdot\cos x$$

由於 $y(\pi)=4$，代入 $y(x)$ 得 $c=-6$

即原式O.D.E.之通解為 $y(x)=-2\cos^2 x-6\cos x$

範題 1.55

試解下列O.D.E.

$$\frac{dy}{dx}+y=f(x)$$

其中 $f(x)=\begin{cases}0 & \text{，} 0\le x\le 2\\ x-2 & \text{，} 2<x\le 4\\ 2 & \text{，} 4<x\end{cases}$ （台大機械）

$$m^2-2m+1=0$$
$$m=1，1$$

則可得 $y_h=c_1e^x+c_2xe^x$

(2)求特解

$$y_p=\phi_1e^x+\phi_2xe^x$$
$$w(e^x,xe^x)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x+xe^x \end{vmatrix}=e^{2x}$$

則 $\phi_1=\int\dfrac{-Ry_2}{w}dx=-\int\dfrac{e^x}{1-x}\cdot\dfrac{xe^x}{e^{2x}}dx=x+\ell\text{n}|x-1|$

$$\phi_2=\int\frac{Ry_1}{w}dx=\int\frac{e^x}{1-x}\cdot\frac{e^x}{e^{2x}}dx=-\ell\text{n}|1-x|$$

所以 $y_p=e^x[x+\ell\text{n}|x-1|]-xe^x\ell\text{n}|1-x|$

(3)故原式O.D.E.之通解

$$y=y_h+y_p$$
$$=c_1e^x+c_2xe^x+e^x[x+\ell\text{n}|x-1|]-xe^x\ell\text{n}|1-x|$$

2.2.3 高階線性常係數O.D.E.特解之逆運算子法

對於n階常係數O.D.E.之通式可表示爲

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\cdots\cdots+a_1y'+a_0y=R(x)$$

若定義 $D=\dfrac{d}{dx}$，$D^2=\dfrac{d^2}{dx^2}$ ，$\cdots\cdots D^n=\dfrac{d^n}{dx^n}$ 則可將上述n階常係數O.D.E.表示爲：

$$(a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots\cdots+a_1D+a_0)y=R(x)$$

若定義 $L(D)=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots\cdots+a_1D+a_0$

則 $L(D)y=R(x)$

得原O.D.E.之特解爲

$$y_p=\frac{1}{L(D)}R(x)$$

一次導數後，能夠與原式相同時，我們稱該n階的微分方程式爲高階正合O.D.E.。總而言之，所謂的正合就是可以將方程式降階，直到成爲一階線性O.D.E.，再利用第一章求解方法得出原式O.D.E.之通解，因此高階變係數方程式是否爲正合，將是一個重要的關鍵。

㈠已知高階變係數O.D.E.之標準式為：

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)=R(x)$$

若滿足 $a_0(x)-a_1'(x)+\cdots\cdots+(-1)^n a_n^{(n)}(x)=0$

則稱爲n階正合常微分方程式，亦即原n階O.D.E.，恰爲一個 $(n-1)$ 階O.D.E.直接微分所得。反過來說，n階正合O.D.E.之求解，可透過直接積分，降爲 $(n-1)$ 階O.D.E.加以簡化並求解。

㈡以3階O.D.E.為例：

標準式：$a_3(x)y'''+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=R(x)$

判別式：$a_0(x)-a_1'(x)+a_2''(x)-a_3'''(x)=0$

則爲正合，可直接積分爲：

$$a_3(x)y''+[a_2(x)-a_3'(x)]y'+[a_1(x)-a_2'(x)+a_3''(x)]y=\int R(x)dx+c$$

即降爲二階O.D.E.，可簡化問題並求解。

㈢以二階O.D.E.為例：

標準式：$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=R(x)$

判別式：$a_0(x)-a_1'(x)+a_2''(x)=0$

則爲正合，可直接積分爲：

$$a_2(x)y'+[a_1(x)-a_2'(x)]y=\int R(x)dx+c$$

成爲一階線性O.D.E.可簡化問題並求解。

㈣正合判別式的由來：

1. 以二階O.D.E.為例：

⑴標準式：$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=R(x)$ (1)

⑵將第一項降階，即 $[a_2(x)y']'=a_2(x)y''+a_2'(x)y'$

$$y' + \frac{1+x}{x^2} y = \frac{c_1}{x^2}$$

為一階線性O.D.E.

則積分因子

$$I = \exp\left[\int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)dx\right] = e^{-\frac{1}{x}} \cdot x$$

$$y(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}\left[\int \frac{c_1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx + c_2\right]$$

$$= \frac{c_1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}\left[\int \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx\right] + c_2 \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

•範題 2.56•

試解下列O.D.E.之通解

$$xy'' + (x+2)y' + y = 0$$

（台科大化工）

Ans：

原式與二階變數O.D.E.之通式比較，可得

$$a_2(x) = x$$

$$a_1(x) = x+2$$

$$a_0(x) = 1$$

檢核 $a_0(x) - a_1'(x) + a_2''(x) = 1 - 1 + 0 = 0$

故原O.D.E.為二階正合型O.D.E.，可積分求解，即

$$a_2(x)y' + [(a_1(x) - a_2'(x))y = \int R(x)dx + c$$

則 $xy' + (x+1)y = c_1$

成為一階線性O.D.E.，則積分因子

$$I = \exp\left[\int\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx\right] = e^{x+\ell n\, x} = x \cdot e^x$$

故原式之通解為

$$y(x) = \frac{1}{x \cdot e^x}[\int c_1 x e^x dx + c_2] = c_1\left(1 - \frac{1}{x}\right) + c_2 \frac{1}{x} e^{-x}$$

代入原O.D.E.，得

$$e^{4x}[u''(x)+8u'(x)+16u(x)]-e^{4x}[8u'(x)+32u'(x)]+e^{4x}[16u(x)]=0$$

即 $u''(x)=0$

得 $u(x)=c_1x+c_2$

$y(x)=(c_1x+c_2)\cdot e^{4x}$，故 xe^{4x} 為原O.D.E.之另一個解。

範題 2.66

已知 $y=e^{2x}$ 為下列O.D.E.之一個解，試解下列O.D.E.之通解

$$(x-2)y''-(4x-7)y'+(4x-6)y=0$$ （台大電機）

Ans：

(1)設 $y(x)=u(x)e^{2x}$ 為原式之通解

則 $y'(x)=u'(x)e^{2x}+2u(x)e^{2x}$

$$y''(x)=u''(x)e^{2x}+4u'(x)e^{2x}+4u(x)e^{2x}$$

(2)將 y' 及 y'' 代入原O.D.E.，可得

$$(x-2)[u''e^{2x}+4u'e^{2x}+4ue^{2x}]-(4x-7)[u'e^{2x}+2ue^{2x}]$$
$$+(4x-6)ue^{2x}=0$$

整理並簡化可得

$$(x-2)u''-u'=0 \qquad (1)$$

(3)式可改寫為

$$[u'(x)]'-\frac{1}{(x-2)}u'(x)=0$$

為 $u'(x)$ 之一階O.D.E.

其解為 $u'(x)=c\exp\left[\int\frac{1}{x-2}dx\right]=c(x-2)$

(4)經由積分可求得 $u(x)$

$$u(x)=\int c(x-2)dx=c_1\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)+c_2$$

則 $y(x)=u(x)\cdot e^{2x}=\left[c_1\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)+c_2\right]e^{2x}$

則將$y, y', y'', y''', \cdots\cdots$代入(1)式，則可得級數解

$$y = 2 + x - 2x^2 - x^3 + 2x^4 + \cdots\cdots$$

4.2.2 常微分方程式Taylor級數解法之待定係數法

待定係數法求解O.D.E.之級數解係先假設解之級數型式，並保留待定係數，將解之假設型式微分後代入原O.D.E.並整理爲係數遞迴關係式後求得級數解通式之方法。

(一)已知O.D.E.之表示式爲

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

(二)假設原O.D.E.之級數解爲：

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots\cdots$$

其中a_0、a_1、a_2、……，爲常係數

針對y進行微分得

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-a)^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x-a)^{n-2}$$

(三)將 $y(a)$, $y'(a)$, $y''(a)$,…代入原O.D.E.，整理出a之遞迴關係式，則原O.D.E.之解爲：

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

範題 4.15

給定下列常微分方程式問題：

$$(x+1)y'' - (x+2)y' + y = 0$$

(1)找出O.D.E.之常點與奇異點

(2)找出通解（利用power series） （台大土木）

Ans：

(1)原O.D.E.可改寫為：

即 $a_5 = -\dfrac{a_1}{20}$

$a_6 = 0$

$a_7 = 0$

故原O.D.E.之通解為：

$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{x^4}{12} + \cdots\cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^5}{20} + \cdots\cdots\right)$$

由 $y(0) = 1$，得 $a_0 = 1$

由 $y'(0) = 0$，得 $a_1 = 0$

即 $y(x) = 1 - \dfrac{x^4}{12} + \cdots\cdots$

範題 4.18

試求在 $x = 0$ 之power級數特解近似值

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$$ （成大土木）

Ans：

因為O.D.E.為非齊性，其 $R(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$

令 $y_p = x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^{-\frac{1}{2}} + a_1 x^{\frac{1}{2}} + a_2 x^{\frac{3}{2}} + \cdots\cdots$

代入原O.D.E.，得

$$\begin{aligned} y(x) &= x^2\left[\frac{3}{4}a_0 x^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}a_1 x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}a_2 x^{-\frac{1}{2}} + \cdots\cdots\right] \\ &\quad + \left[a_0 x^{-\frac{1}{2}} + a_1 x^{\frac{1}{2}} + a_2 x^{\frac{3}{2}} + \cdots\cdots\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots\cdots\right] \end{aligned}$$

比較係數，得

$a_0 = \dfrac{4}{7}$