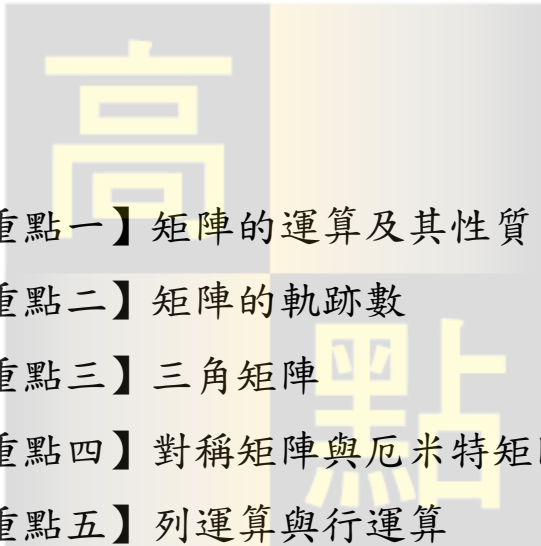


第一章

矩陣

- 
- 【重點一】矩陣的運算及其性質
 - 【重點二】矩陣的軌跡數
 - 【重點三】三角矩陣
 - 【重點四】對稱矩陣與厄米特矩陣
 - 【重點五】列運算與行運算
 - 【重點六】可逆矩陣與反矩陣
 - 【重點七】可逆矩陣的充份且必要條件
 - 【重點八】方塊矩陣的可逆性

【重點九】線性系統

【重點十】非齊次線性系統解的判斷

【重點十一】LU 分解

【重點十二】利用 LU 分解來解線性系統

【重點十三】 $P^T LU$ 分解



《重點一：矩陣的運算及其性質》

(1) 矩陣運算的性質：

設 A 、 B 、 C 為矩陣 且 α, β 為純量

以下性質皆在運算有意義的前提之下皆成立：

(i) 矩陣加法具有交換性：

$$A + B = B + A$$

(ii) 矩陣加法具有結合性：

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

(iii) 矩陣的加法單位元素：

$$O + A = A + O = A, \text{ 其中 } O \text{ 為零矩陣}$$

(iv) 矩陣的加法反元素：

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

(v) 純量積對純量加法具有分配性：

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

(vi) 純量積對矩陣加法具有分配性：

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

(vii) 純量積對純量乘法具有結合性：

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$$

(viii) 矩陣乘法具有結合性：

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

(ix) 純量積對矩陣乘法具有結合性：

$$\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$$

(x) 矩陣乘法對矩陣加法具左分配性以及右分配性：

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{且} \quad (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

(xi) 矩陣的乘法單位元素：

$$A \cdot I = A \quad \text{且} \quad I \cdot A = A$$

(xii) 零矩陣的乘法：

$$A \cdot O = O \quad \text{且} \quad O \cdot A = O$$

(2) 以下命題皆為 False

(i)

a. $AB = BA$

b. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

c. $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

d. $(AB)^2 = A^2B^2$

〔反證〕：

$$\text{取 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) $A^n = O \Rightarrow A = O$

〔反證〕：

$$\text{取 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii)

a. $A \neq O$ 且 $B \neq O \Rightarrow AB \neq O$

b. $AB = O \Rightarrow A = O$ 或 $B = O$

〔反證〕：

$$\text{取 } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O \quad \text{且} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O$$

(iv) $AB = AC$ 且 $A \neq O \Rightarrow B = C$

〔反證〕：

$$\text{取 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(v) $A^2 = A \Rightarrow A = O$ 或是 $A = I$

〔反證〕：

$$\text{取 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{則 } A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

但是 $A \neq O$ 且 $A \neq I$

(vi) 二次的矩陣方程式 $X^2 = A$ 具有兩個解

〔反證〕：

$$\text{取 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{則 } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = A \quad \text{且} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = A \quad \text{且} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = A \quad \text{且} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = A$$

所以二次的矩陣方程式 $X^2 = A$ 具有 4 個解

(3)

(i) $A \times B^{(i)} = (A \times B)^{(i)}$ ，對於所有 i

(ii) $A_{(j)} \times B = (A \times B)_{(j)}$ ，對於所有 j

(4) 判斷矩陣相等的方法：

設 A 與 B 為 $m \times n$ 的矩陣

$$(i) \quad A = B \Leftrightarrow (A)_{ij} = (B)_{ij}, \text{ 其中 } i = 1, 2, \dots, m \text{ 且 } j = 1, 2, \dots, n$$

$$(ii) \quad A = B \Leftrightarrow A \cdot \vec{e}_i = B \cdot \vec{e}_i, \text{ 對於所有 } i = 1, 2, \dots, n$$

$$(iii) \quad A = B \Leftrightarrow A \cdot \vec{x} = B \cdot \vec{x}, \text{ 對於所有 } \vec{x} \text{ 為 } n \times 1 \text{ 的行矩陣}$$

(5) 轉置的性質：

$$(i) \quad (\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$$

$$(ii) \quad (A^T)^T = A$$

$$(iii) \quad (AB)^T = B^T A^T$$

$$(iv) \quad (A^k)^T = (A^T)^k, \text{ 其中 } k \in \mathbb{Z}^+$$

$$(v) \quad f(A)^T = f(A^T), \text{ 其中 } f(x) \text{ 為多項式}$$

(6) 共軛轉置的性質：

$$(i) \quad (\alpha A + \beta B)^H = \bar{\alpha} A^H + \bar{\beta} B^H$$

$$(ii) \quad (A^H)^H = A$$

$$(iii) \quad (AB)^H = B^H A^H$$

$$(iv) \quad (A^k)^H = (A^H)^k, \text{ 其中 } k \in \mathbb{Z}^+$$

$$(v) \quad f(A)^H = f(A^H), \text{ 其中 } f(x) \text{ 為佈於實數多項式}$$

《考題》

1. $\begin{bmatrix} 162 & 5054 \\ 7 & 218 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a + b + c = ?$

(A) 58 (B) 59 (C) 60 (D) 61

(113 政大資料 4 分)

【解】：(D)

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab+1 & a+abc+c \\ b & bc+1 \end{bmatrix}$$

因為 $\begin{bmatrix} 162 & 5054 \\ 7 & 218 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ab+1 & a+abc+c \\ b & bc+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 162 & 5054 \\ 7 & 218 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab+1=162 \\ a+abc+c=5054 \\ b=7 \\ bc+1=218 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=23 \\ b=7 \\ c=31 \end{cases}$$

所以 $a + b + c = 61$

《考題》

(20%) Mark each of the following statements True (T) or False (F). (Need not to give reasons.)

(d) If three $n \times n$ matrices A , B , and C satisfy $AB = AC$, then we have $B = C$.

(112 成大電通 5 分)

【解】: False

〔反證〕:

$$\text{取 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

則 $AB = AC$ 且 $A \neq O$

但是 $B \neq C$

《考題》

17. (10%) Let A be a 4×7 matrix, and let B be an 7×4 matrix. Then

A) $(AB)^T = B^T A^T$

B) $AB^T = BA^T$

C) $(AB)^T = A^T B^T$

D) A^T is an 4×7 matrix

E) none of the preceding statements is true

(114 台大電機 10 分)

【解】: A)

《重點二：矩陣的軌跡數》

(1) trace 的性質：

$$(i) \operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \cdot \operatorname{tr}(A) + \beta \cdot \operatorname{tr}(B)$$

$$(ii) \operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$$

$$(iii) \operatorname{tr}(A^H) = \operatorname{tr}(\overline{A}) = \overline{\operatorname{tr}(A)}$$

(iv) 設 A 為 $m \times n$ 的矩陣且 B 為 $n \times m$ 的矩陣

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

(2) trace 的應用：

A 為 $m \times n$ 的實數矩陣

(i) $\operatorname{tr}(A^T A)$ 為 A 中所有項取平方之和 (sum)

(ii) $\operatorname{tr}(A^T A) = 0 \Leftrightarrow A = O$