

單元一

基礎數學

高

點



高點文化publish.get.com.tw

版權所有・翻印必究

第一章

邏 輯

- 【重點一】命題
- 【重點二】 $p \text{ imply } q$ 命題
- 【重點三】量詞的順序性
- 【重點四】判斷具有量詞的命題 True 與 False
- 【重點五】量詞與邏輯運算
- 【重點六】邏輯的 De-Morgan's Law
- 【重點七】判斷複合命題的 True 與 False
- 【重點八】利用量詞翻譯成數學符號
- 【重點九】邏輯謎題

(Logic puzzle)



《重點一：命題》

(1) 一句話(declarative sentence)的值只有 True 或是 False 稱為命題(proposition)或是 敘述(statement)

(2)

(i) 一個命題永遠為 True，則稱此命題為真理(tautology)或稱定理(theorem)

(ii) 一個命題永遠為 False，則稱此命題為矛盾(contradiction)

(iii) 一個命題有時候為 True、有時候為 False

則稱此命題為可滿足的(satisfiable)或是偶發句(contingency)

《考題》

1. (10%) Which of the following is NOT a proposition ?

(a) The Earth is flat. (b) $2 + 2 = 4$. (c) $x + 5 = 10$. (d) The sky is blue.

(114 成大電機 10 分)

【解】：(c)

《考題》

Suppose that the domain consists of all propositions. Express the following statement using logical operators, predicates, and quantifiers.

The conjunction of two tautologies is a tautology.

(111 師大資工 5 分)

【解】：True

令 p 與 q 為 tautologies

$\Rightarrow p$ 為 True 且 q 為 True

$\Rightarrow p \wedge q$ 為 True

所以 $p \wedge q$ 為 tautology

《重點二： $p \rightarrow q$ 命題》

(1) implication 的對與錯：

- (i) p 為 True 且 q 為 True，則 $p \rightarrow q$ 為 True
- (ii) p 為 False，則 $p \rightarrow q$ 為 True
- (iii) p 為 True 且 q 為 False，則 $p \rightarrow q$ 為 False

(2) $p \rightarrow q$ 等價於 $\neg p \vee q$ 等價於 $\neg q \rightarrow \neg p$

(3) implication 的證明方法：

$p \rightarrow q$ 的證明方法：

(i) 直接證法 (direct proof)：

假設 p 為 True，去證明 q 為 True

(ii) 間接證法 (indirect proof)：

假設 q 為 False，去證明 p 為 False

(iii) 矛盾證法 (proof by contradiction)：

假設 p 為 True 而且假設 q 為 False，去導出矛盾的結果

(4) implication 的使用方法：

$p \rightarrow q$ 的使用方法

判斷 p 為 True，則可以保證 q 亦為 True

《考題》

[5 points] Select the true statement below. Suppose you do not know what my favorite number is (but you do know that 31 is a prime).

- (a) If 31 is prime, then 31 is my favorite number.
- (b) If 31 is my favorite number, then 31 is prime.
- (c) If 31 is not prime, then 31 is my favorite number.
- (d) 31 is my favorite number or 31 is prime.
- (e) 31 is my favorite number or 31 is not my favorite number.

(111 台聯大電機 5 分)

【解】：

- (a) False (b) True (c) True (d) True (e) True

《考題》

Determine which of the following propositions is false: (8%)

- (A) $1+1=3$ if and only if $2+2=3$.
- (B) If it is raining, then it is raining.
- (C) If $1 < 0$, then $3=4$.
- (D) If $1+1=2$ or $1+1=3$, then $2+2=3$ and $2+2=4$.
- (E) None of the above.

(112 中興資工乙組 8 分)

【解】：(D)

《考題》

Which of the following propositions is equivalent to " $\neg p \rightarrow q$ "?

- (a) $\neg q \rightarrow \neg p$ (b) $\neg p \vee \neg q$ (c) $\neg q \vee p$ (d) $\neg q \rightarrow p$

(111 中興資工甲組 2 分)

【解】：(d)

$$\neg p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow p \equiv p \vee q$$

《考題》

(24%, 3% each) True or False. (No proof needed.)

- (b) The Boolean product of $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ is $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(110 台科大資工 3 分)

【解】：

令 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ 為 $n \times n$ 的布林矩陣

定義 A 與 B 的布林乘法 Boolean product 為

$$(A \odot B)_{ij} = ((A)_{i1} \wedge (B)_{1j}) \vee ((A)_{i2} \wedge (B)_{2j}) \vee \cdots \vee ((A)_{in} \wedge (B)_{nj})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

《考題》

n is an integer

Show that if $n^3 + 5$ is odd, then n is even using

(a) (5%) a proof by contraposition.

(b) (5%) a proof by contradiction.

(111 中正資工 10 分、106 中正資工 10 分)

【證明】：

(a)

〔欲證：若 n 為奇數，則 $n^3 + 5$ 為偶數〕

因為 n 為奇數

$\Rightarrow$ 存在 $k \in \mathbb{Z}$ ，滿足 $n = 2k + 1$

$$\begin{aligned}n^3 + 5 &= (2k + 1)^3 + 5 \\&= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 + 5 \\&= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 6 \\&= 2 \cdot (4k^3 + 6k^2 + 3k + 3) \text{ 為偶數}\end{aligned}$$

所以 $n^3 + 5$ is odd, then n is even

(b)

原命題為： $n^3 + 5$ 為奇數 $\rightarrow n$ 為偶數

利用矛盾證法：

假設 n 不為偶數

$\Rightarrow n$ 為奇數

$\Rightarrow$ 存在 $k \in \mathbb{Z}$ ，滿足 $n = 2k + 1$

$$\begin{aligned}n^3 + 5 &= (2k + 1)^3 + 5 \\&= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 + 5 \\&= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 6 \\&= 2 \cdot (4k^3 + 6k^2 + 3k + 3) \text{ 為奇數，產生矛盾！}\end{aligned}$$

所以 n 為偶數

《考題》

Prove or disapprove that given an integer n , if $n^3 + 5$ is odd, then n is odd.

(111 成大工科 10 分)

【解】：False

〔反證〕：

取 $n = 2$

$\Rightarrow n^3 + 5 = 2^3 + 5 = 13$ 為 odd

但是 $n = 2$ 不為 odd

《考題》

8. (5%) Please use the method of "proofs by contradiction" combined with the concept of resolution to complete the following proof, "A company has interviewed three people A, B, and C, and the following three propositions are all true

(a) at least one of the three people is admitted,

(b) If A is admitted, but B is not admitted, C must be admitted,

(c) if B is admitted, C must be admitted

then we can derive the conclusion that C will definitely be admitted".

(113 中興資工甲組 5 分)

【證明】：

利用矛盾證法：

假設 C is not admitted.

根據(a)

$\Rightarrow$ A or B are admitted.

Case I : A is admitted, but B is not admitted.

根據(b)

$\Rightarrow$ C is admitted, 產生矛盾！

Case II : B is admitted, but A is not admitted.

根據(c)

$\Rightarrow$ C is admitted, 產生矛盾！

Case III : A is admitted and B is admitted.

根據(c)

$\Rightarrow$ C is admitted , 產生矛盾 !

所以 C is admitted.

《考題》

(10%) Determine whether the following argument is valid or not valid with a proof.

Rainy days make gardens grow.

Gardens don't grow if it is not hot.

It always rains on a day that is not hot.

Therefore, if it is not hot, then it is hot.

(111 北大資工 10 分)

【證明】：

令 p 為 rainy days 且 q 為 gardens grow 且 r 為 it is hot

Rainy days make gardens grow 為 $p \rightarrow q$

Gardens don't grow if it is not hot 為 $\neg r \rightarrow \neg q$

It always rains on a day that is not hot 為 $\neg r \rightarrow p$

(不熱的日子總是下雨)

This argument is of the form :

$$p \rightarrow q$$

$$\neg r \rightarrow \neg q$$

$$\neg r \rightarrow p$$

$$\therefore \neg r \rightarrow r$$

因為 $p \rightarrow q$ 為 True

$\Rightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ 為 True $\rightarrow$ (i)

又因為 $\neg r \rightarrow \neg q$ 為 True $\rightarrow$ (ii)

根據(i)與(ii)

$\Rightarrow \neg r \rightarrow \neg p$ 為 True $\rightarrow$ (iii)

因為 $\neg r \rightarrow p$ 為 True

$\Rightarrow \neg p \rightarrow r$ $\rightarrow$ (iv)

根據(iii)與(iv)

$\Rightarrow \neg r \rightarrow r$ 為 True

所以 the argument 為 valid

《考題》

Four friends have been identified as suspects for an unauthorized access into a computer system. They have made statements to the investigating authorities.

小英 said "神掌 did it." 韓總 said "I did not do it." 神掌 said "柯 P did it." 柯 P said "神掌 lied when he said that I did it." If the authorities also know that exactly one is lying, who did it ?

- A. 小英
- B. 韓總
- C. 神掌
- D. 柯 P
- E. 郭董

(109 中央資工 5 分)

【解】：C

令"神掌 did it."為(i)

"韓總 did not do it." 為(ii)

"柯 P did it."為(iii)

"神掌 lied when 神掌 said that 柯 P did it." 為(iv)
因為這四個人恰有一人說謊

Case I：若是小英說謊，其他人說實話

- ⇒ (iii)與(iv)為 True
- ⇒ 神掌 lied 為 True
- ⇒ 神掌說謊，產生矛盾

Case II：若是韓總說謊，其他人說實話

- ⇒ (iii)與(iv)為 True
- ⇒ 神掌 lied 為 True
- ⇒ 神掌說謊，產生矛盾

Case III：若是神掌說謊，其他人說實話

- ⇒ (iii)為 False 且 (iv)為 True，合理
- ⇒ 神掌做的

Case IV：若是柯 P 說謊，其他人說實話

- ⇒ (iv)為 False
- ⇒ 神掌 said that 柯 P did it. 為 True 且 神掌 lied 為 False
- ⇒ 神掌說實話
- ⇒ 神掌做的 且 柯 P 做的

綜合以上結果，神掌做的