◎重點一把抓～句句精華，K 了就上

★★★主題1 極限求法～各校都愛瘋

極限四大解法：
1．羅必達法則還沒出現前之解法
2．羅必達法則出現後之解法
3．利用里曼和之解法(不行時再用夾擠)
4．利用泰勒級數之解法

◆二個必背之極限解題**工具**：

1． $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$

2． $\lim\limits_{n \to \infty} (1+\dfrac{1}{n})^n = e$ 或 $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$

◆當 $x \to 0$，善用 $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \sin^{-1} x \sim \tan^{-1} x \sim \sinh x \sim \tanh x$
$\sim \ln(1+x)$
$(1-\cos x) \sim \dfrac{1}{2}x^2$

之**等效**(符號為 ~)觀念，以節省計算時間。但此**等效**觀念僅能使用在「乘除」運算，不可使用在「加減」運算！

◆當 $x \to 0$，$x > x^2 > x^3 > \cdots$
當 $x \to \infty$，$\cdots > x^3 > x^2 > x$

◆碰到 $\sin^{-1} x$、$\tan x$、$\tan^{-1} x$、$\ln(1+x)$，盡量用 Taylor 級數展開。(因為會愈微愈複雜！)

第一型 連續函數型 $\to$ 直接代入

第二型 分子、分母同時趨近於 0 之極限(即 $\frac{0}{0}$)

若 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 會使 $g(a)=0$，則會有以下之二種結果：

1. 若 $f(a) \neq 0$，則不用計算即知極限不存在。
2. 若 $f(a)=0$，則極限可能存在、亦可能不存在，需進一步計算才知。

※計算要訣～設法把分母會 0 之因素消除！方法如下：

1. 分解因式：將產生 0 之因式提出消掉。
2. 反有理化：

(1) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (分母不為 0)

(2)其餘的式子則“見招拆招”(基本原則：使分母不為 0)。

第三型 趨近 ∞ 之極限

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0}{b_n x^n+\cdots+b_1 x+b_0}=\begin{cases} m<n, & 0 \\ m=n, & \frac{a_m}{b_n} \\ m>n, & \pm\infty \end{cases}$
2. 若遇 $\infty-\infty$：設法化為分式以利比較。
3. 若遇 $\lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0}{b_n x^n+\cdots+b_1 x+b_0}$ ：

令 $y=-x$ 將變數改為 y 使計算簡化。

第四型 **三明治定理(夾擠定理)**

1. 三明治定理乃是使用其它方法皆失敗後才使用之方法。
2. 常配合高斯函數與三角函數使用。如

$x-1<[x]\leq x$ ， $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$

3. 三明治定理之應用：

(1)若 $b>a>0$ ，則 $\sqrt[n]{b^n}<\sqrt[n]{a^n+b^n}<\sqrt[n]{b^n+b^n}=\sqrt[n]{2b^n}$

(2)若 $c>b>a>0$，則 $\sqrt[n]{c^n}<\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}<\sqrt[n]{c^n+c^n+c^n}=\sqrt[n]{3c^n}$

第五型 左右極限(觀念型)

1. 有些題目只要你計算左極限或右極限
2. 有些題目是陷阱題，因為左極限≠右極限

第六型 羅必達法則

使用羅必達法則時，要有警覺性，隨時注意是否為 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 才可持續用！

$\left.\begin{array}{l}\text{1. } \frac{0}{0}\text{，亦即分子、分母皆趨近於零} \\ \text{2. } \frac{\infty}{\infty}\text{，亦即分子、分母皆趨近於無限大}\end{array}\right\}$ 標準型

3. 將 $0\cdot\infty$ 與 $(\infty-\infty)$ 化為 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 計算之
4. 將 ∞^0、0^0、1^∞ 利用 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ 化為 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 計算之

第七型 里曼和求極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$$

計算某些複雜的極限式(屬於無窮級數)。

第八型 泰勒級數求極限～記住四大天王：

$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots$，$-\infty<x<\infty$

$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots$，$-\infty<x<\infty$

$e^x = 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$，$-\infty<x<\infty$

$$e^{-x}=1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\cdots \text{，} -\infty<x<\infty$$

常考的家常菜：(前三個級數，優秀的同學考前要記到前二項！)

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots$$

$$\tan^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots \text{，} -1\le x\le 1$$

$$\sin^{-1}x=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{3}{2^2 2!\cdot 5}x^5+\frac{3\cdot 5}{2^3 3!\cdot 7}x^7+\cdots \text{，} -1\le x\le 1$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \text{，} -1<x\le 1$$

$$\ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right) \text{，} -1\le x<1$$

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x+\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2!}x^2+\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3+\cdots$$

$$\sinh x=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

$$\cosh x=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\cdots$$

注意：以上的級數都是在 $x=0$ 展開，因此只能使用在求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 之題目！例如 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}$ 就不能用！

★★ 主題2 漸近線～台大、成大、中山愛瘋

1. **垂直(vertical)漸近線**：

(1)若 $\lim\limits_{x\to a}y(x)=\infty$，則 $x=a$ 為 $y(x)$ 之垂直漸近線。

(2)若 $\lim_{x\to b} y(x) = -\infty$，則 $x=b$ 為 $y(x)$ 之垂直漸近線。

2.**水平**(horizontal)**漸近線**：

(1)若 $\lim_{x\to\infty} y(x) = a$，則 $y=a$ 為 $y(x)$ 之水平漸近線。

(2)若 $\lim_{x\to-\infty} y(x) = b$，則 $y=b$ 為 $y(x)$ 之水平漸近線。

3.**斜**(Oblique 或 slant)**漸近線**

(1)若 $\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = m_1$，再由 $\lim_{x\to\infty}(y-m_1x) = b_1$ 求出 b_1，則 $y = m_1x + b_1$ 為斜漸近線。

(2)若 $\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = m_2$，再由 $\lim_{x\to-\infty}(y-m_2x) = b_2$ 求出 b_2，則 $y = m_2x + b_2$ 為斜漸近線。

為何如此定義？因為當 $x\to\infty$ 時，漸近線 $y=mx+b$ 與函數 $y(x)$ 二者幾乎相同，$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(y(x)-mx-b\right)=0 \;\to\; \lim_{x\to\infty}\left(\frac{y(x)}{x}-m-\frac{b}{x}\right)=0$

$\because \lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$，故 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y(x)}{x}-m\right)=0 \to \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=m$

即先算出 m，再代回原式求出 b～容易記吧！

故知：計算斜漸近線要算二次極限！

◆水平漸近線可視為斜漸近線在斜率為 0 的特例。

※**速解法**：若曲線以“**多項式**”表為 $F(x,y)=0$，將 y 以 $mx+b$ 代入並化簡 $F(x,y)$ 成為 x 之降冪形式，令 x 之最高次項與第二高次項係數皆為 0 可解出 m 與 b，則斜漸近線為 $y=mx+b$，此法可解得水平漸近線與斜漸近線，但不能解得垂直漸近線。(此法對隱函數之外型效