◆反導數在經濟學上的應用

1. 已知邊際成本函數為 $MC(x)$，則成本函數為 $C(x)=\int MC(x)dx$

2. 已知邊際收入函數為 $MR(x)$，則收入函數為 $R(x)=\int MR(x)dx$

3. 已知邊際利潤函數為 $MP(x)$，則利潤函數為 $P(x)=\int MP(x)dx$

說例	已知銷售美力達腳踏車的收入函數滿足 $R'(x)=60+2xe^{-0.01x^2}$，且 $R(0)=0$，求收入函數 $R(x)$。

[解] 由 $R'(x)=60+2xe^{-0.01x^2}$ 得 $dR=(60+2xe^{-0.01x^2})dx$

積分得 $R(x)=60x-200e^{-0.01x^2}+c$

代入 $R(0)=-200+c=0\to c=200$

$\therefore R(x)=60x-200e^{-0.01x^2}+200$。

*　　　*　　　*

說例	已知供給函數滿足 $\dfrac{dx}{dp}=p\sqrt{p^2-25}$，當 $p=\$13$ 時，$x=600$，其中 p 是商品價格(元)，x 是數量，求供給函數 $x=f(p)$。

[解] 由 $\dfrac{dx}{dp}=p\sqrt{p^2-25}$ 得 $dx=p\sqrt{p^2-25}dp$

$\xrightarrow{\text{積分}} x(p)=\dfrac{1}{3}(p^2-25)^{3/2}+c$

代入 $x(13)=600\to 600=\dfrac{1}{3}\cdot(169-25)^{3/2}+c\to c=24$

$\therefore x(p)=\dfrac{1}{3}(p^2-25)^{3/2}+24$

即供給函數為 $x=f(p)=\dfrac{1}{3}(p^2-25)^{3/2}+24$。

*　　　*　　　*

說例	已知福智農場生產之有機花椰菜，其每月生產 x 百公斤之邊際成本函數為 $MC(x)=32-0.04x\ \left(\frac{萬元}{百公斤}\right)$ 已知其每月之固定成本為 5 萬元，求每月之成本函數 $C(x)$。

[解] 對 $MC(x)=32-0.04x$ 積分得 $C(x)=\int(32-0.04x)dx=32x-0.02x^2+k$

固定成本為 5 萬元，即 $C(0)=5$

代入 $C(0)=k=5$

$\therefore\ C(x)=32x-0.02x^2+5$。

*　　　　*　　　　*

說例	已知台灣自產咖啡豆之價格隨時間之變化率如下： $p'(t)=\frac{t}{2475}(t^2+1)^5$ 已知目前之價格為 230 元，求三個月之後的價格。

[解] 由 $p'(t)=\frac{t}{2475}(t^2+1)^5$

則 $p(t)=\int\frac{t}{2475}(t^2+1)^5dt=\int\frac{1}{2475}u^5\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{29700}u^6+c$

$u=t^2+1,\ du=2tdt$

$=\frac{1}{29700}(t^2+1)^6+c$

代入 $p(0)=\frac{1}{29700}+c=230\rightarrow c=230-\frac{1}{29700}$

$\therefore\ p(t)=\frac{1}{29700}\left[(t^2+1)^6-1\right]+230$

故 $p(3)=\frac{1}{29700}\left[1000000-1\right]+230=33.67+230=263.67$。

*　　　　*　　　　*

◆收入流量

房租收入或是許多的投資而言，收入函數可說是時間變數的函數關係，這種隨時間變化的收入函數稱為**收入流量**(income stream) $f(t)$，單位常以 $\frac{元}{年}$ 表示，因此從現在 $t=0(年)$ 到 $t=T(年)$ 的全部收入流量總值(總收入) $A(t)$ 可以表示為

$$A(t)=\int_0^T f(t)dt$$

若此收入流量以年利率 r 、採連續複利之方式計息，則我們可推出(此處省略推導)從現在 $t=0(年)$ 到 $t=T(年)$ 的連續所得的現值為

$$P=\int_0^T f(t)e^{-rt}dt$$

現值的功能可以用來評估投資的淨利，以做為商業方案評估的參考。

利用現值，再配合連續複利公式，從現在 $t=0(年)$ 到 $t=T(年)$ 的連續所得的終值為

$$F=e^{rT}\int_0^T f(t)e^{-rt}dt$$

說例	某人投資一份年金壽險，此壽險的收入流量為 $f(t)=10000\sqrt{t+1}$，則從現在起 5 年內全部收入流量總值為何？

[解] $A=\int_0^5 10000\sqrt{t+1}dt=10000\left[\frac{2}{3}(t+1)^{3/2}\right]_0^5=\frac{20000}{3}\left(6^{3/2}-1\right)\approx 91313$ 元

*　　　*　　　*

說例	某人投資一商品的收入流量為 $f(t)=1000t$，以年利率 5%、採連續複利之方式計息，則從現在起 10 年內連續所得的現值為何？

[解] $P=\int_0^{10}1000te^{-0.05t}dt=1000\left[(-20t-400)e^{-0.05t}\right]_0^{10}=1000(400-600e^{-0.5})$

$=36082$ 元

*　　　*　　　*

說例	某跨國公司投資一油田的收入流量為 $f(t)=5e^{0.02t}$ $\frac{百萬元}{年}$，以年利率 4%、採連續複利之方式計息，則 (1)從現在起 5 年內連續所得的現值為何？ (2)從現在起 5 年內連續所得的終值為何？

[解]

(1) $P=\int_0^5 5e^{0.02t}e^{-0.04t}dt=\int_0^5 5e^{-0.02t}dt=5\left[-50e^{-0.02t}\right]_0^5=250(1-e^{-0.1})$

$=23.8$ 百萬元。

(2) $F=Pe^{rT}=23.8e^{0.04\times5}=23.8e^{0.2}=29.1$ 百萬元。

*　　　*　　　*

說例	某機車製造廠欲擴充廠房，有如下二個擴充方案： A 方案：廠房須投資 5000 萬元，往後 10 年每年有 1000 萬的收入 B 方案：廠房須投資 10000 萬元，往後 10 年每年有 2000 萬的收入 假設二方案皆以年利率 5%、採連續複利之方式計息，請問那一個方案較有利？