

亂試用重點

1. 夾擠定理 (squeeze theorem) (pinching theorem) :

若 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$, 則 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ 。

2. 『夾擠定理』又稱為『三明治定理』 (sandwich theorem) 。

3. 常考題型 :

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \text{Max}\{a, b\} \quad (\forall a, b > 0)$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow -\infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \min\{a, b\} \quad (\forall a, b > 0)$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow 0} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \text{不存在} \quad (\forall a, b > 0)$$

$$\textcircled{4} \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{a^n + b^n}{2} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{ab} \quad (\forall a, b > 0)$$

$$\textcircled{5} \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[3]{abc} \quad (\forall a, b, c > 0)$$

4. 『夾擠定理』應用在超大角度的三角函數時，

常配合下列技巧來逼近 (詳見題型 2) :

$$(1) -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$(2) -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$(3) -\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

5. 『夾擠定理』應用在超大數值之 Gauss 函數

的技巧 (詳見題型 3):

$$x-1 < [x] \leq x$$



陳立開講，觀念突破



1. 夾擠定理之證明:

若 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ，且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ 。

【證明】 ① $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$

$$\ni 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ 時, } |f(x) - l| < \varepsilon$$

即 $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ 恆成立

② $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$

$$\ni 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ 時, } |g(x) - l| < \varepsilon$$

即 $l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$ 恆成立

③取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ，則當 $0 < |x - a| < \delta$ 時，

$$l - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < l + \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |h(x) - l| < \varepsilon \text{ 恆成立，}$$

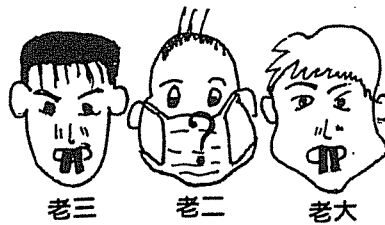
即 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ 得證。

2. 右圖為孔家三兄弟之玉照，已知三兄弟均因

遺傳性掉牙而幾乎無齒，且三兄弟之牙齒

數目為為：孔老三 $\leq$ 孔老二 $\leq$ 孔老大

，你能否用『夾擠定理』得知孔老二剩下幾顆牙齒？



3. 『夾擠定理』的應用：

(1) 超大角度之『三角函數』；

(2) 超大數值之『Gauss 函數』。

4. 陳立博士以畢生研究三角幾何之功力，針對三角函數極限，歸納發明出

下列『本尊-分身』速解法，對填充題與選擇題十分有效，敬請讀者仔

細體會琢磨，假以時日，同學們必可成為陳立博士之分身。