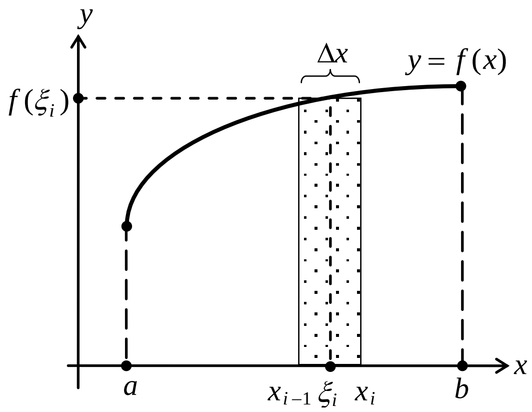
§5-0 定積分之意義

至此已學過**微分**與**不定積分**，這二者在運算上是互逆的。本章將再說明微分與積分之關聯性，首先談"**定積分**"(Definite Integral)的意義。

定積分之定義



設函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間為連續，現將此區間"等分"成 n 個小段，如右圖所示：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

令 Δx 表每個小段之間隔，即 $\Delta x=x_i-x_{i-1},\ i=1,2,\cdots,n$，現在於 $[x_{i-1},x_i]$ 區間上任取一點 ξ_i，則此 ξ_i 所對應之函數值(或稱高度)為 $f(\xi_i)$，如上圖所示之陰影區域面積可表為 $f(\xi_i)\Delta x$。依此步驟，由 $y=f(x)$、x 軸在區間 $[a,b]$ 所圍成面積乃由 n 個長方條形狀之面積相加而成，即 $\boxed{\text{面積}=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x}$

但上式之面積僅是一個近似值，欲得良好的準確值還要令 $n\to\infty$，意即將區間無窮多等分可得 $\text{面積}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}}_{\text{取極限}}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}}_{\text{求和}}\underbrace{f(\xi_i)}_{\text{取樣}}\underbrace{\Delta x}_{\text{分割}}$。如下之定義：

定義 **定積分**(definite integral)

若 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x$ 存在，則 $\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x\equiv\int_a^b f(x)dx}$ $\cdots(1)$

稱 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 是**可積分**(integrable)，其中 a 為此積分之"**下限**"(lower limit)，b 為"**上限**" (upper limit)。有上、下限之積分稱為"**定積分**"(Definite Integral)。

由此定義知"**定積分四步曲**"：**分割**、**取樣**、**求和**、**取極限**，(1)式通稱為

里曼積分(Riemann Integral)，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$ 稱為**里曼和**(Riemann Sum)。

◆ $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$ ～里曼和(Riemann sum)之求法

利用定積分四步曲：分割、取樣、求和、取極限計算由 $y=x^3,\ y=0,\ x=0,\ x=1$ 所圍成區域之面積，依下述四步驟：

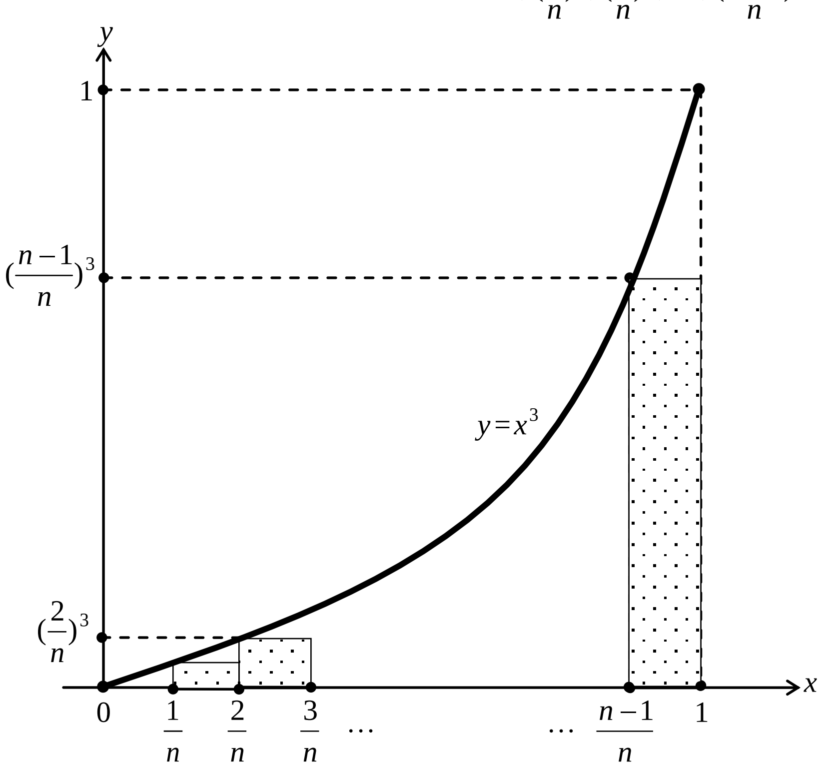
第一步：**分割**

將 $[0,1]$ 分成 n 等分，此區域成為 n 個長條，每個長條寬度均為 $\frac{1}{n}$。

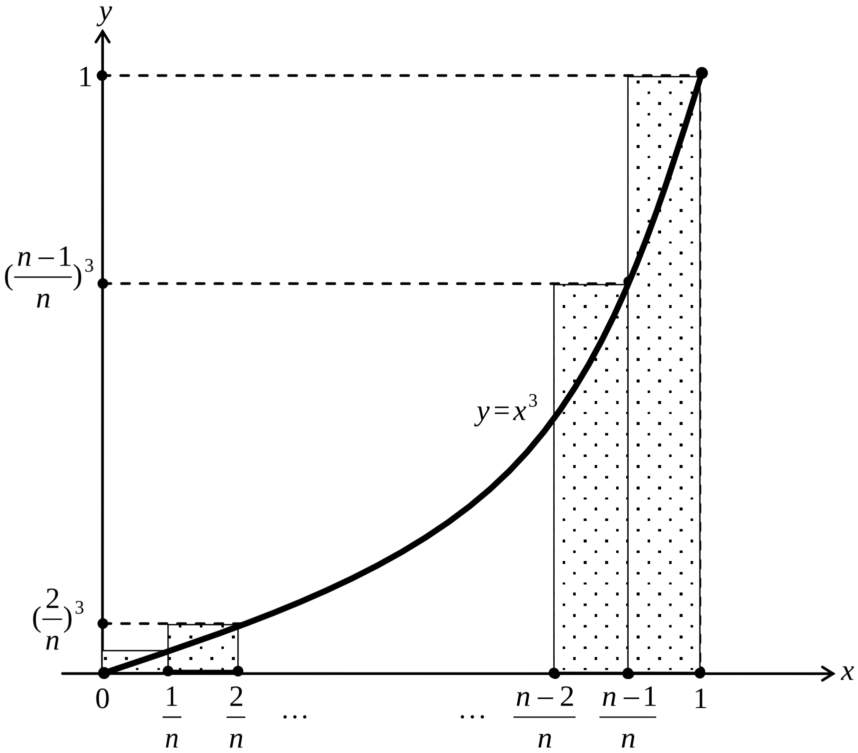
第二步：**取樣**

在每個長條上挑出一樣本點以代表此長條之高，此處以其最小值、最大值為代表。

當高度為最小值時，其各長條之高度為 $0,(\frac{1}{n})^3,(\frac{2}{n})^3,\cdots,(\frac{n-1}{n})^3$



當高度為最大值時，其各長條之高度為 $(\frac{1}{n})^3, (\frac{2}{n})^3, (\frac{3}{n})^3, \cdots, (\frac{n}{n})^3$



第三步：**求和**

當高度取為最小值時，此面積之和稱為**下和**(lower sum)，即

$$\text{下和} = \frac{1}{n}\left[0 + (\frac{1}{n})^3 + (\frac{2}{n})^3 + \cdots + (\frac{n-1}{n})^3\right] = \frac{1}{n^4}\left[1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3\right]$$

$$= \frac{1}{n^4}\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 = \frac{(n-1)^2}{4n^2} \equiv L_n$$

當高度取為最大值時，此面積之和稱為**上和**(upper sum)，即

$$\text{上和} = \frac{1}{n}\left[(\frac{1}{n})^3 + (\frac{2}{n})^3 + \cdots + (\frac{n}{n})^3\right] = \frac{1}{n^4}\left[1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\right]$$

$$= \frac{1}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{(n+1)^2}{4n^2} \equiv U_n$$

第四步：**取極限**

不論 n 為任何正整數，恆有 $L_n \le$ 區域真實面積 $\le U_n$，現在令 $n \to \infty$ (即分割愈細)，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^2}{4n^2} = \dfrac{1}{4}$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

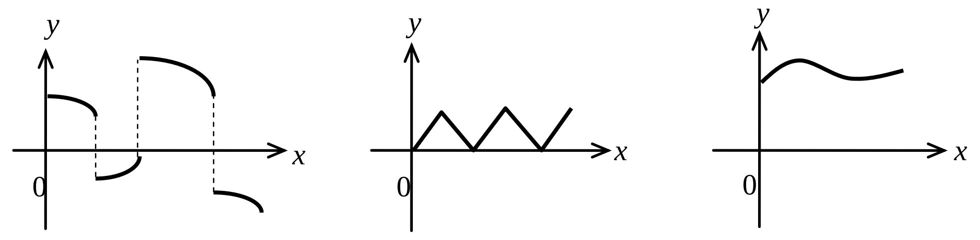
故 $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} L_n = \dfrac{1}{4}$，由夾擠定理知此區域面積即為 $\dfrac{1}{4}$。

但定積分若以定義(分割、取樣、求和、取極限)去求，顯然太麻煩了！故以上說明僅告訴我們定積分可以利用此觀念求出。

定積分之觀念與規定

1. 顯然地，$\int_a^a f(x)dx = 0$，因為其面積為 0。
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$，即上下限互換，其值變號。
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\square)d\square$。
4. 只要 $f(x)$ 為連續，即能與 x 軸、$[a,b]$ 區間包圍了一個區域，其面積一定存在，故有如下之定理：

定理 若 $f(x)$ 為連續，則 $f(x)$ 可積分，但反之不然。即“若 $f(x)$ 為可積分，則 $f(x)$ 為連續”是不對的，因為若函數屬於**分段連續** (piecewise continuous)時，需分段積分！如下圖所示：



	分段連續	連續但不可微	可微分
可否積分：	可	可	可
可否微分：	不可	不可	可

5.極限是工具(tool)，可用來**定義**函數之**連續**、**可微分**、**定積分**！

6.若區分為：$\begin{cases}\text{定積分：亦稱里曼和}\\ \text{不定積分：微分逆運算}\end{cases}$，則“定積分”與“不定積分”之差異只在積分區間！且知

(1)連續函數不一定可微，若可微，則導函數很容易算(且一定成功)。

(2)連續函數的定積分一定存在，但不定積分卻很難算(即使學了一堆積分技巧，仍大部分積不出，在讀完第四章後已有同感)。

定理 **積分第一均值定理**(亦簡稱為**積分均值定理**)

設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，則存在一數 $c\in(a,b)$，使得

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)} \qquad \cdots(2)$$

說明：積分均值定理之幾何意義如右圖所示：

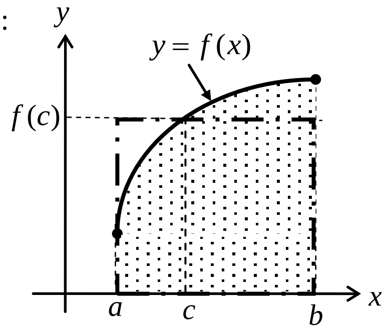
網點面積 $=\int_a^b f(x)dx$

矩形面積 $= f(c)(b-a)$

$\because \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

知 $f(c)$ 是：

$f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 之**平均高度**。



*　　*　　*

定義 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之**平均值**(average) $\bar{f}$ 為 $\boxed{\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$

定理 **積分第二均值定理**(數學系才看)

設 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，且 $g(x)\geq 0$，則存在一數 $c\in(a,b)$，使得 $\boxed{\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx}$