如一個函數含有兩個或以上的自變數時，則對此函數所有之微分均屬偏微分型，此種類型之微分方程式即稱為**偏微分方程式**(Partial Differential Equation，簡稱 P.D.E.)，科學上凡是跟"**時間**"與"**位置**"相關之函數，所導出的均為 P.D.E.，如熱傳、波動、振動、流力、財工、…。大部份的 P.D.E. 其通解不易求得，近年來多使用電腦求解，所以 P.D.E. 的觀念更須精進，如此才能選擇最正確的路！

§1-1 基本定義

在探討 P.D.E. 時，要將方程式之"**自變數**"與"**因變數**"分辨清楚。P.D.E. 分類的名詞，如**階**、**齊次**與**非齊次**，其**定義**皆與 O.D.E.相同，因此學起來可以駕輕就熟。但在"線性與非線性"之定義裡，在分類上多出二個所謂"**半線性**"(semi-linear)、"**準線性**"(quasi-linear)之定義，現分類說明如下：

定義 **階**(order)

一個 P.D.E. 中，"導函數"之最高階數即稱為該 P.D.E. 的**階數**。

定義 **線性**(linear)

一個 P.D.E. 中，未知函數之間或未知函數與其導函數之間無相互乘積，且未知函數及其導函數均為一次，稱為**線性** P.D.E.，否則稱為**非線性** P.D.E.。

線性 P.D.E. 是可以寫成通式的，且以目前的科技水平而言，線性 P.D.E. 是可以被解出的(包含利用電腦之數值解)。

定義 **齊次**與**非齊次**

一線性 P.D.E. 中，含純為自變數函數之項(包括常數項)者若存在，稱為**非齊次** P.D.E.，否則稱為**齊次** P.D.E.。

若此 P.D.E. 已為**非線性**，再細分如下：

定義 **半線性**(semi-linear)

在一個非線性 P.D.E. 中，其最高階導數項前面之係數僅與自變數有關，稱為**半線性** P.D.E.。

定義 **準線性**(quasi-linear)

一個非線性 P.D.E. 中，最高階導數項前面之係數其微分階數皆比此 P.D.E. 之階數小，稱為**準線性** P.D.E.。

定義 **完全非線性**(fully nonlinear)

一個非線性 P.D.E. 若不屬於**準線性**者，稱為**完全非線性** P.D.E.。

心得 P.D.E. :
- 線性：最容易解
- 非線性
  - 半線性：稍難解(50%非線性)
  - 準線性：更難解(80%非線性)
  - 完全非線性：最難解(100%非線性)

且：線性⊂半線性⊂準線性⊂完全非線性。

說例 1 基本題	判斷下列 P.D.E. 之類型。

[解]

(1) $u_t = u_{xx}$ ：二階**線性**齊次 P.D.E.。

(2) $u_{tt} = u_{xx} + \sin x$ ：二階**線性**非齊次 P.D.E.。

(3) $u_t = u_{xx} + u^2$ ：二階**半線性** P.D.E.，其中 u_{xx} 之係數僅為常數。

(4) $u_t = xu_{xx} + u^2$ ：二階**半線性** P.D.E.，其中 u_{xx} 之係數僅與 x 有關。

(5) $u_t + uu_x = 0$ ：一階**準線性** P.D.E.，其中 u_x 之係數與 u 有關。

(6) $u_t u_{xx} + u_x = 0$ ：二階**準線性** P.D.E.，其中 u_{xx} 之係數與 u_t 有關。

(7) $(u_x)^2 + (u_y)^2 = 1$ ：一階**完全非線性** P.D.E.。

(8) $u_{xx}u_{yy}+(u_{xy})^2=\sin x$ ：二階**完全非線性** P.D.E.。

*　　*　　*

再說明一要點：準線性 P.D.E. 與線性 P.D.E. 一樣仍有**通式**可以表達，且"一階"準線性 P.D.E. 在**通式**上已經包含了一階線性 P.D.E.，因此只要學會"一階"準線性 P.D.E. 之解法，就已經會解一階線性 P.D.E. 了(此事實詳下章之說明)！

又我們在剛開始學解一 P.D.E. 時，會發現如下之現象：一個 P.D.E. 同時有好幾個解。例如：

$$u_1(x,y)=x^2-y^2 \quad ; \quad u_2(x,y)=e^x\cos y$$
$$u_3(x,y)=\ln(x^2+y^2) \quad ; \quad u_4(x,y)=3x^2y-y^3$$

皆為 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 之解(讀者將 u_1、u_2、u_3、u_4 代入即知)，但究竟那一個為真正的解？其實每一個都是解！因為所有的 P.D.E. 皆起源自物理或工程問題，因此每個 P.D.E. 的解都要滿足其邊界或啟始條件，亦即必須滿足這些"條件"的考量後才是真正的解，所以這些 u_1、u_2、u_3、u_4 都屬於**特解**(particular solution)也，在給定條件後才能最後確認。而在 P.D.E. 中，經常會有超過"二個"以上之解，即 P.D.E. 解之自由度比 O.D.E. 更高，因此 P.D.E. 比 O.D.E. 更難解也是個中道理！

以往在解 O.D.E. 時所用到的觀念與方法，在解 P.D.E. 時仍會用到，如**疊加原理**、**未定係數法**，此處先敘述疊加原理，其它則於以後再討論。

定理 **疊加原理**(Superposition Principle)

若 u_1、u_2 皆為"**線性**、**齊次**" P.D.E. 的解，則 $u=c_1u_1+c_2u_2$ 亦為原方程式之解，其中 c_1、c_2 為常數。

推廣之，若 u_1、u_2、… 皆為一線性齊次 P.D.E. 的解，則 $u=\sum_{i=1}^{\infty}c_iu_i=c_1u_1+c_2u_2+\cdots$ 亦為原方程式之解。

此處只要是一階(含)以上之 P.D.E. 皆可以使用疊加原理！

說例 2 **說明題**	我們可以驗證 $u_n=(x+y)^n$，$n=0,1,2,\cdots$ 均為一階線性齊次 P.D.E. ：$u_x-u_y=0$ 之解，故由疊加原理知 $u=\sum_{n=0}^{\infty}c_nu_n=c_0+c_1(x+y)+c_2(x+y)^2+\cdots=F(x+y)$ 亦為解。

*　　*　　*

解 P.D.E. 時方程式之"分類"相當重要，有了前面所談的線性、齊次之觀念後，下列之分類對諸位而言是輕而易舉的。

一、一階 P.D.E.

1. 一階**線性** P.D.E. 為 $a(x,y)z_x+b(x,y)z_y+c(x,y)z=g(x,y)$ …(1)
2. 一階**準線性** P.D.E. 為 $P(x,y,z)z_x+Q(x,y,z)z_y=R(x,y,z)$ …(2)

若對照(1)、(2)二式，即知(1)式乃是(2)式之特例而已，所以只要(2)式會解，那(1)式即會解。

二、二階線性 P.D.E.

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u=G(x,y) \quad \cdots(3)$$

(3)式可仿照二次曲線分類法而分類如下：

1. **双曲線型**(Hyperbolic)：當 $B^2-4AC>0$ 時
2. **抛物線型**(Parabolic)：當 $B^2-4AC=0$ 時
3. **橢圓　型**(Elliptic)：當 $B^2-4AC<0$ 時

以上三種分類要熟記，分類之原因將於§1-2 中再詳細說明之。

三、二階準線性 P.D.E.

$$Ru_{xx}+Su_{xy}+Tu_{yy}=F \qquad \cdots(4)$$

其中 R、S、T、F 為 x, y, u, u_x, u_y 之函數。

說例 3 基本題	判斷如下之二階線性 P.D.E. 之分類。

[解]

(1) $u_t=u_{xx}$ ： $B^2-4AC=0$，為拋物線型。

(2) $u_{tt}=u_{xx}$ ： $B^2-4AC=4>0$，為双曲線型。

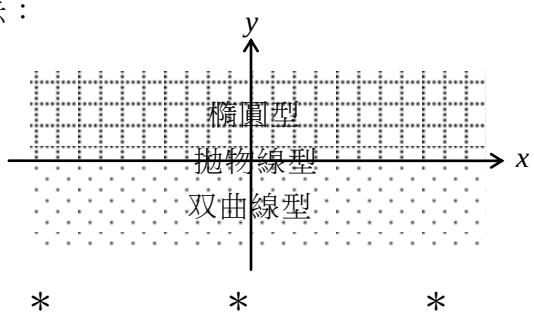
(3) $u_{xt}=0$ ： $B^2-4AC=1>0$，為双曲線型。

(4) $u_{xx}+u_{yy}=0$ ： $B^2-4AC=-4<0$，為橢圓型。

(5)著名之 **Tricomi** eq.： $yu_{xx}+u_{yy}=0$， $B^2-4AC=-4y$

在 x-y 平面上隨著 y 值而有 $\begin{cases} y>0 \Rightarrow \text{橢圓型} \\ y=0 \Rightarrow \text{拋物線型} \\ y<0 \Rightarrow \text{雙曲線型} \end{cases}$

如下圖所示：



＊　　＊　　＊

類 試決定 $(x^2-1)u_{xx}+2yu_{xy}-u_{yy}+u_x+u_y=0$ 之區域為

(1)双曲線型　(2)橢圓型　(3)拋物線型

答： $B^2-4AC=4y^2+4(x^2-1)=4(x^2+y^2-1)$

故得 $(1)x^2+y^2>1$　$(2)x^2+y^2<1$　$(3)x^2+y^2=1$

1-8 偏微分方程式與數值解

初學 P.D.E. 都有一種感覺，即滿懷信心解 P.D.E.，最後解出了，但其解仍是**函數群**，有解與沒解差不多，令人沮喪！不像 O.D.E. 的解都是確定的**函數**，解完 O.D.E. 就很有成就感。P.D.E. 與 O.D.E. 會有此差異，乃 P.D.E. 至少含二個自變數以上，故解之自由度大，相對而言，O.D.E. 則只有一個自變數！以上說明如下表所示：

	O.D.E.	P.D.E.
解法	積分(與 B.C. 無關)	僅少數可積分，其它都要靠經驗或驗算(與 B.C. 有關)
解之外型	僅差**積分常數**(自由度小) n 階 O.D.E. 有 n 個係數	外型差異很大(自由度大) n 階 P.D.E. 有 n 個**任意函數**
解之決定	B.C. 或 I.C.	B.C. 或 I.C. ，還有與此 P.D.E. 有關之空間幾何結構

※精選習作※

1. 決定 $u_{xx}+yu_{yy}=0$ 之區域為 (台大)

(1)双曲線型 (2)橢圓型 (3)拋物線型

2. P.D.E.：$u_{xx}+xu_{yy}=0,\ x>0$ 之型式為何？

※解答※

1. $B^2-4AC=0-4y=-4y$，$\therefore \begin{cases} y>0 & \Rightarrow \text{橢圓型} \\ y=0 & \Rightarrow \text{拋物線型} \\ y<0 & \Rightarrow \text{双曲線型} \end{cases}$。

2. $B^2-4AC=-4x<0$，橢圓型。

§1-2 二階線性 P.D.E. 之標準化

在本節中將探討如何知曉何種變數變換，可以簡化二階線性 P.D.E.，也就是如何將一任意二階線性 P.D.E. 如下：

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u = G(x,y) \quad \cdots(1)$$

經過適當的變數變換後化成簡單易分類或可解的型式，這種過程稱為"**標準化**"。

設有一變數變換對如右：$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$ $\cdots(2)$

且(2)式之變換滿足 $Jacobian\equiv\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$ ，則

(以下之推導，相關的來龍去脈可參見本人所著：**微積分學習要訣**第八章第六節)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

；以**基本微分運算法**得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}+\frac{\partial \eta}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

將以上之 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 代入(1)式得

$$\overline{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\overline{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\overline{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\overline{D}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\overline{E}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\overline{F}u=\overline{G} \qquad \cdots(3)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\overline{A} &\equiv A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\\
\overline{B} &\equiv 2A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+2C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\\
\overline{C} &\equiv A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\\
\overline{D} &\equiv A\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}+C\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+D\frac{\partial \xi}{\partial x}+E\frac{\partial \xi}{\partial y}\\
\overline{E} &\equiv A\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}+C\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}+D\frac{\partial \eta}{\partial x}+E\frac{\partial \eta}{\partial y}\\
\overline{F} &\equiv F\\
\overline{G} &\equiv G
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots(4)$$

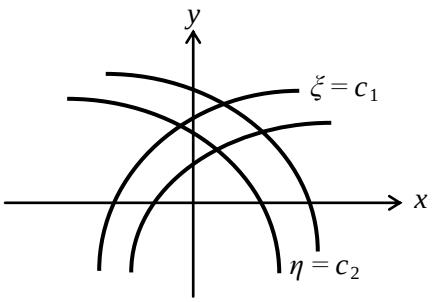
因此可以看出：若令 $\overline{A}=\overline{C}=0$，則方程式即可簡化。因 $\overline{A}$ 與 $\overline{C}$ 均具有同一型式，故可以用通式表為

$$\boxed{A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+B\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2=0} \qquad \cdots(5)$$

上式中之 φ 可能為 ξ 或 η。(5)式也可改寫為

$$A\left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}\right)^2+B\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}+C=0 \qquad \cdots(6)$$

此處可以利用幾何意義解釋(6)式。
如右圖所示：



沿著曲線 $\varphi =$ 常數，有：

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0$$

即 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}$ 在 $\varphi =$ 常數 …(7)

將(7)式代入(6)式得 $\boxed{A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0}$ …(8)

(8)式即為**轉換方程式**(注意：B 的前面是負號)，特稱為(1)式之**特徵方程式**(Characteristic eq.)，以熟記為宜。由(8)式分別可得到如下二個微分方程式：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \end{cases} \quad \cdots(9)$$

(9)式乃 x-y 平面上沿 $\xi =$ 常數 或 $\eta =$ 常數 之微分方程式，其解稱為**特徵曲線**(Characteristic curve)，即為我們所要求的變數變換對！

由(9)式中之 $\sqrt{B^2 - 4AC}$ 此項，令我們回憶起本章開頭曾利用 $B^2 - 4AC$ 之值將二階線性 P.D.E. 分類，因此在這兒我們也要以 $B^2 - 4AC$ 之值來闡述各類型方程式“標準化”後之結果。

[Ⅰ]双曲線型：$B^2 - 4AC > 0$

此時由(9)式可得二條不同之特徵曲線，且從 $\bar{A} = \bar{C} = 0$ 之事實，知可將(3)式簡化為

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = H\left(u, \xi, \eta, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \quad \cdots(10)$$