所謂**高階微分方程**，是指二階或二階以上的微分方程而言。我們若將高階微分方程區分二部份：**線性**與**非線性**，則線性方程只有部分可以解，非線性方程幾乎都不能解！因此工程數學會考(教)的高階微分方程大部份是線性方程，而可以解的線性方程已有一套"標準"解法，故各位只要讀完本章內容，即可應付所有高階微分方程。現將本章所探討之 O.D.E. 分類如下：

- 高階 O.D.E.
  - 線性
    - 常係數：公式解
    - 變係數
      - Cauchy-Euler O.D.E.
      - 恰當型(Exact)
      - 降階法(Reduced order)
      - 因變數變更法
      - 自變數變更法
  - 非線性
    - 缺 y (因變數)
    - 缺 x (自變數)

§2-1 基本定義與觀念

首先我們說明幾個基本名詞。

(1)n **階線性微分方程** (linear O.D.E. of order n)：若一 O.D.E. 可以表成 $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=R(x)$ …(1)

稱之。若 O.D.E. 不能寫成(1)式，則稱為 n **階非線性微分方程**，其中 $R(x)$ 亦稱為**輸入項**(input)或**外力項**。

(2)**齊次**與**非齊次方程**(Homogeneous and Nonhomogeneous)

於(1)式中，若 $R(x)=0$ 稱為**齊次**(物理意義為：無外力項，從推導**力學**或**電路學**方程式之過程即知)。若 $R(x)\neq 0$，則(1)式稱為**非齊次**方程式。

(3)**常係數**(constant coefficient) 與**變係數**(variable coefficient)

於(1)式中，若 $a_n(x)$、$a_{n-1}(x)$、…、$a_0(x)$ 都是常數，稱為**常係數**

高點文化publish.get.com.tw
版權所有・翻印必究

O.D.E.，否則稱為**變係數** O.D.E.。常係數 O.D.E. 已有公式解，相當簡單，但變係數 O.D.E. 僅有固定的一些類型可解。

說例 1 **說明題**	(1) $2y''+5y'+8y=0$ 為二階常係數齊次 O.D.E.。 (2) $2y''+5y'+8y=x$ 為二階常係數非齊次 O.D.E.。 (3) $2y''+5xy'+8y=0$ 為二階變係數齊次 O.D.E.。 (4) $2y''+5xy'+8y=3x$ 為二階變係數非齊次 O.D.E.。

＊ ＊ ＊

定理 **疊加原理**(Superposition principle)

有一個二階"線性"而且"齊次"之 O.D.E.，若將該方程式之二解任意線性組合，則所得之函數亦為原方程式之解。

證明：設 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 之二解為 y_1、y_2(因為積分二次)

則有 $y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0$ 與 $y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0$

將 $y=c_1y_1+c_2y_2$ 代入原 O.D.E. 得

$$(c_1y_1+c_2y_2)''+p(x)(c_1y_1+c_2y_2)'+q(x)(c_1y_1+c_2y_2)$$

$$=c_1(y_1''+py_1'+qy_1)+c_2(y_2''+py_2'+qy_2)$$

$=0$ ～故得證。

但必須注意的是：本定理僅對"**線性**"且"**齊次**"的 O.D.E. 才適用，對於非線性或非齊次之 O.D.E. 是不能用的。

＊ ＊ ＊

在進入解微分方程式之前，我們還要探討一組函數之**線性獨立**(linear independent)和**線性相依**(linear dependent) 的性質，因為判斷一組函數是線性相依或線性獨立對解方程式很有幫助。

定義 **線性獨立**(Linear Independent，簡稱為 "L.I.")

線性相依(Linear Dependent，簡稱為 "L.D.")

已知一組 n 個函數 $y_1(x)$、$y_2(x)$、…、$y_n(x)$ 與 n 個常數 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，若在區間 **I** 內會使得下式：$c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n=0$

高點文化publish.get.com.tw
版權所有・翻印必究

成立之唯一條件為 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$，則稱此 n 個函數在區間 **I** 內為線性獨立，否則即稱為線性相依。

說例 2 **說明題**	(1) $\{x, 2x\}$ 為 L.D.，因為 $c_1x+c_2(2x)=0$ 成立之條件除了 $c_1=c_2=0$ 外，$c_1=2,\ c_2=-1$ 亦可。 (2) $\{x, x^2\}$ 為 L.I.，因為 $c_1x+c_2x^2=0$ 成立之唯一條件僅為 $c_1=c_2=0$。 (3) $\{0,\ x\}$ 為 L.D.，因為 $c_1(0)+c_2(x)=0$ 成立之條件必為 $c_2=0$，c_1 為任意數(當然包括非零值)。故知 0 與任意函數為 L.D.。 (4) $\{x, x^2, 2x+x^2\}$ 為 L.D.，因為 $2x+x^2=2(x)+(1)x^2$，即第三個函數僅為前面函數之線性組合(即了無新意)。

＊ ＊ ＊

由前例可知：其實只要任意二個非零函數在某區間內為“變數倍”，就是 L.I.，為“常數倍”，就是 L.D.。但當函數之數目較多時，要判斷是 L.I. 或 L.D.，如果再用常數倍或變數倍此方法已不可能，此時須藉助**郎司基**(Wronskian) 行列式，如下面說明：

若一組在區間 I 內皆 n 階可微分之函數 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，則**定義**

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \cdots(2)$$

上式稱作 Wronskian **行列式**，簡寫為 W，則有如下定理：

定理 已知在區間 I 內皆 n 階可微分之函數 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，則

$$\begin{cases} W\neq 0 \Leftrightarrow \text{L.I.} \\ W=0 \Leftrightarrow \text{L.D.} \end{cases}。$$

證明： 將判斷 L.I. 或 L.D. 之**定義式**：$c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n=0$

高點文化publish.get.com.tw
版權所有・翻印必究

連續微分 $n-1$ 次得：$\begin{cases} c_1y_1' + c_2y_2' + \cdots + c_ny_n' = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)} + \cdots + c_ny_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$

綜合之，寫為 $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

(1)若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 為 L.D.，則由定義知 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 必不全為零，由矩陣理論(詳§11-5)知 $W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$ 必成立。

(2)若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 為 L.I.，則由定義知 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 必全為零，仍利用矩陣理論(詳§11-5)得 $W(y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq 0$

(3)在 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 為 n 階可微分之條件下，則 $\begin{cases} W \neq 0 \Leftrightarrow \text{L.I.} \\ W = 0 \Leftrightarrow \text{L.D.} \end{cases}$。

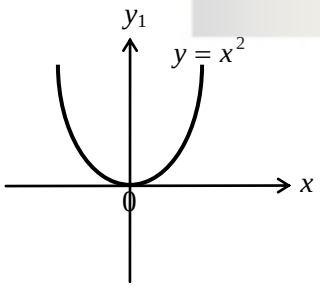
* * *

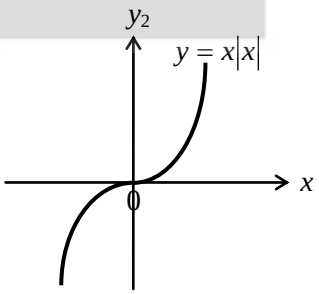
以下再來考慮不同區間時線性獨立或線性相依之判斷，通常這一類的函數皆非 n 階可微分之函數，因此不要貿然使用 Wronskian 判斷。

說例 3 **說明題**	已知 $y_1 = x^2$, $y_2 = x\|x\|$，請在以下之區間： (1) $[0, \infty)$ (2) $(-\infty, 0]$ (3) $(-\infty, \infty)$ 分別說明其為 L.I. 或 L.D.？

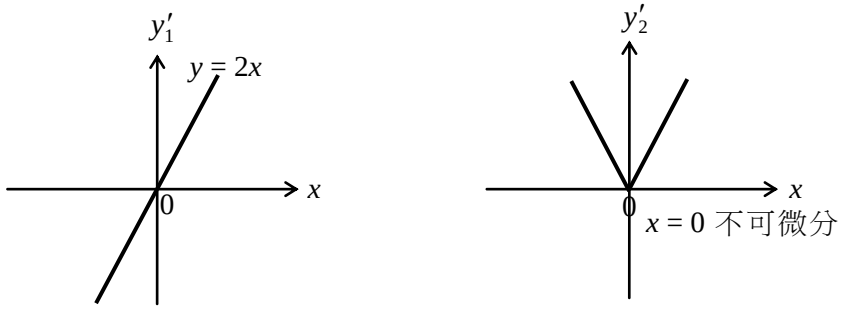
[解]先將 $y_1 = x^2$, $y_2 = x|x|$ 之圖形繪如下：

$$y_2 = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < \infty \\ -x^2, & -\infty < x \le 0 \end{cases}, \quad y_2' = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < \infty \\ -2x, & -\infty < x \le 0 \end{cases} \equiv 2|x|$$





高點文化publish.get.com.tw
版權所有・翻印必究



看出 $y_2'(x)$ 在 $x=0$ 不可微，故需分段討論如下：

(1)在區間 $[0,\infty)$ ：$\begin{cases} y_1 = x^2, & 0 \le x < \infty \\ y_2 = x^2, & 0 \le x < \infty \end{cases}$ ，故 y_1、y_2 為 L.D.。

(2)在區間 $(-\infty, 0]$ ：$\begin{cases} y_1 = x^2, & -\infty < x \le 0 \\ y_2 = -x^2, & -\infty < x \le 0 \end{cases}$ ，故 y_1、y_2 為 L.D.。

(3)在區間 $(-\infty,\infty)$ ：$\begin{cases} y_1 = x^2, & -1 \le x \le 1 \\ y_2 = x\lvert x\rvert, & -1 \le x \le 1 \end{cases}$ ，一看即知非為常數倍，故 y_1、y_2 為 L.I.。

現若計算其 Wronskian，會有 $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x\lvert x\rvert \\ 2x & 2\lvert x\rvert \end{vmatrix} = 0$ ，會將 y_1、y_2 誤判為 L.D.！當然錯誤，亦即此時無法以 $W(y_1, y_2)$ 之值判斷其相關性，因為 $y_2(x)$ 不滿足二階可微分之條件。

＊ ＊ ＊

類 已知 $y_1 = \begin{cases} x^2, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$，$y_2 = \begin{cases} 0, & x \ge 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ ，請在以下之區間：(1) $[0,\infty)$ (2) $(-\infty, 0]$ (3) $(-\infty,\infty)$ 分別說明其為 L.I. 或 L.D.？

答：繪圖後知 $y_1'(x)$、$y_2'(x)$ 在 $x=0$ 皆不可微分，故需分段討論如下：

(1)區間 $[0,\infty)$：$c_1(x^2) + c_2(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$ ，故 y_1、y_2 為 L.D.。
因為此時存在 c_2 不為零之解！

(2)區間 $(-\infty, 0]$：$c_1(0) + c_2(x^2) = 0 \rightarrow c_2 = 0$ ，故 y_1、y_2 為 L.D.。
因為此時存在 c_1 不為零之解！

高點文化publish.get.com.tw
版權所有・翻印必究

(3)區間 $(-\infty,\infty)$：對於 $c_1y_1+c_2y_2=0$，由(1)、(2)之討論知，需取其交集，即需 $c_1=c_2=0$ 才可以，故 y_1、y_2 為 L.I.。

根據上述討論，我們接著探討如下線性 O.D.E. 的通解：

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=R(x)$$

當 $R(x)=0$ 時，O.D.E. 成為齊次，此時若已知 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 皆為上式之解(因為要積分 n 次，即含 n 個**積分常數**)，且亦有 $W(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq 0$(因任意二個已為 L.I. 之函數經積分後仍為 L.I.，為數學運算上成立之事實)，則由疊加原理知上式之通解必如下所示：

$$y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x) \qquad \cdots(3)$$

亦即(3)式組成(1)式之**基本解**(Fundamental solution)，亦將 $y_h(x)$ 稱為(1)式之**齊次解**(Homogeneous solution)，外型必含有 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 等 n 個積分常數。而當 $R(x)\neq 0$ 時，O.D.E. 成為非齊次，此時會存在一個不含未定係數之解(此即**物理現象**：外力大，變形大；外力小，變形小)，此解稱為**特解**(Particular solution)，此一特解之意義即是**非齊次解**(non-Homogeneous solution)也！則此時整個(1)式之**通解**(亦稱為**全解**)可以表為

$$\boxed{y(x)=y_h(x)+y_p(x)} \qquad \cdots(4)$$

[通解＝齊次解＋特解]

證明：因為 $a_n(x)y_h^{(n)}+a_{n-1}(x)y_h^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y_h'+a_0(x)y_h=0 \quad \cdots(a)$

$a_n(x)y_p^{(n)}+a_{n-1}(x)y_p^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y_p'+a_0(x)y_p=R(x) \quad \cdots(b)$

$(a)+(b)$ 得 $a_n(y_h+y_p)^{(n)}+a_{n-1}(y_h+y_p)y_h^{(n-1)}+\cdots+a_0(y_h+y_p)=R(x)$

故得證 $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$ 滿足(1)式。

＊ ＊ ＊

高點文化publish.get.com.tw
版權所有・翻印必究

第二章 總複習題

1. 解 $(x^2+1)y''+4xy'+2y=0$

2. 解 $(x+1)y''-(x+2)y'+y=e^x(x+1)^2$

3. 解 $xy''+2y'+5xy=0$

4. 解 $-(x^2+x)y''+2y'+2y=6(x+1)$

5. 解 $2xy^2+yy''=(y')^2$ (成大研)

6. 解 $y''+2y'+2y=5\cos x,\quad y(0)=y'(0)=0$ (台大研)

7. 解 $y''-3y'+2y=\cos(e^{-x})$

8. 解 $y''-y=\dfrac{1}{\cosh x}$

9. 解 $x^2y''-2xy'+2y=x\ln x$

10. 解 $y''-\dfrac{2}{x}y'+\left(\dfrac{2}{x^2}-1\right)y=4x^2e^x$ (台聯大電)

11. 解 $y'''+y'=\sec x$ (台大研)

12. 解 $x^2y''-4xy'+6y=7x^4\sin x$ (台大研)

13. 解 $y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2x}}{x-1}$ (成大研)

14. 解 $y''+2y'+5y=20e^{3x},\quad y(0)=2,\ y'(0)=6$ (台大研)

15. 解 $y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2t}}{t}$ (115 台大研)

16. 解 $y''+2y'+2y=4e^{-x}\sec^3 x$ (115 國考)

17. 求 $xy''+(1-2x)y'+(x-1)y=0$ 的解析解？ (成大研)

18. 解 $(1-x)y''+xy'-y=0$，$y(0)=3,\ y'(0)=-1$ (成大研)

19. 解 $y''-6y'+9y=x^2e^{3x}$，$y(0)=2,\ y'(0)=17$ (台大研)

20. 解 $y''-3xy'+3y=2x^4e^x$ (台大研)

註：更多的練習題請參考我寫的「**工數題型思路分析**」一書，題題精彩，說明詳盡，考研必備！

高點文化publish.get.com.tw
版權所有・翻印必究

※解答※

1. 因為 $2-(4x)'+(x^2+1)''=0$ 知此 O.D.E. 屬恰當，故假設

$a_1(x)y'+a_0(x)y=Q(x)$，則 $a_1y''+(a_1'+a_0)y'+a_0'y=Q'(x)$

比較係數得 $a_1=x^2+1,\ a_0=2x,\ Q(x)=c_1$

整理後得到一階線性 O.D.E. 為 $y'+\dfrac{2x}{x^2+1}y=\dfrac{c_1}{x^2+1}$

利用公式解法解上式得 $y(x)=c_1\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{c_2}{x^2+1}$。

2. 觀察知 $y_1=e^x$ 為其一組齊次解，令 $y_2=uy_1=ue^x$ 代入 O.D.E. 可解出 $u=(x+2)e^{-x}$，$\therefore\ y_2=x+2$

$W=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=(x+1)e^x$，令 $y_p=u_1y_1+u_2y_2$，$\therefore\ y_p=\dfrac{1}{2}x^2e^x+xe^x-2e^x$

故 $y(x)=c_1e^x+c_2(x+2)+\dfrac{1}{2}x^2e^x+xe^x$。

3. 由 $Q-\dfrac{1}{4}P^2-\dfrac{1}{2}P'=5-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}=5$，故知可以使用因變數變更法，即

令 $u(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\dfrac{1}{x}$

再令 $y(x)=\dfrac{1}{x}v$ 代入原 O.D.E. 整理得 $v''+5v=0$

上式解為 $v(x)=c_1\cos\sqrt{5}x+c_2\sin\sqrt{5}x$

$\therefore\ y(x)=\dfrac{1}{x}\left(c_1\cos\sqrt{5}x+c_2\sin\sqrt{5}x\right)$。

4. 因為 $2-(2)'+(-x^2-x)''=0$ 知此 O.D.E. 屬恰當，故假設

$a_1(x)y'+a_0(x)y=Q(x)$，則 $a_1y''+(a_1'+a_0)y'+a_0'y=Q'(x)$

比較係數得 $a_1=-x^2-x,\ a_0=2x+3,\ Q(x)=3x^2+6x+c_1$

整理後得到一階線性 O.D.E. 為 $y'-\dfrac{2x+3}{x^2+x}y=-\dfrac{3x^2+6x+c_1}{x^2+x}$

利用公式解法解上式得 $y(x)=c_1\dfrac{1}{x+1}+c_2\dfrac{x^3}{x+1}+3x$。

高點文化publish.get.com.tw
版權所有・翻印必究