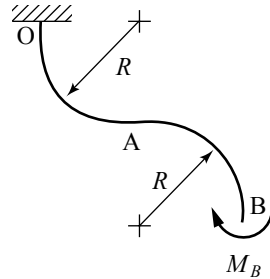


範題 16



如右圖所示之結構OAB是由兩個1/4圓所構成，位於同一平面上，結構OAB之楊氏模數為 E ，慣性矩為 I ，在B點有彎矩 M_B 作用，略去剪力及軸力的影響，求：



(94台科大營建)

- (1) B點的向下位移 δ_B 。
- (2) B點的傾斜角 θ_B 。

【解析】

因也要求B點之向下位移，故於B點處假想存在一向下垂直力 P ，如圖所示，但 $P=0$ 。而兩個1/4圓弧之斷面以 θ 及 ϕ 來表示之，由圖中可看出 θ 處斷面之彎矩 $M(\theta)$ 及 ϕ 處斷面之彎矩 $M(\phi)$ 分別為

$$M(\theta) = M_B + P \times [R - R \cos \theta] = M_B + PR(1 - \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} M(\phi) &= M_B + P \times R \sin \phi \\ &= M_B + PR \sin \phi \end{aligned}$$

所以結構之應變能 U 為

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2(\theta)}{2EI} R d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{M^2(\phi)}{2EI} R d\phi$$

- (1) 應用卡氏第二定理可求B點之向下位移 δ_B 如下：

$$\begin{aligned} \delta_B &= \left. \frac{\partial U}{\partial P} \right|_{P=0} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{M_B}{EI} \cdot R(1 - \cos \theta) \cdot R d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{M_B}{EI} \cdot R \sin \phi R d\phi \\ &= \frac{\pi R^2 M_B}{2EI} \quad (\downarrow) \end{aligned}$$

- (2) 應用卡氏第二定理可求B點之傾斜角 θ_B 如下：

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M_B} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_B}{EI} \cdot 1 \cdot R d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{M_B}{EI} \cdot 1 \cdot R d\phi = \frac{\pi R M_B}{EI} \quad (\curvearrowright)$$

